

中山市第一中学 2022-2023 学年第二学期高一数学单元检测二

第八章 立体几何

命题人：陈焕兵 审题人：李逸渊

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 下列命题不正确的个数是（ ）

- ①三点确定一个平面；
- ②圆心和圆上两个点确定一个平面；
- ③如果两个平面相交有一个交点，则必有无数个公共点；
- ④如果两条直线没有交点，则这两条直线平行.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 设 m, n 是不同的直线, α, β 是不同的平面, 则下列命题正确的是（ ）

- A. $m \perp n, n // \alpha$, 则 $m \perp \alpha$
- B. $m // \beta, \beta \perp \alpha$, 则 $m \perp \alpha$
- C. $m \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $m // \beta$
- D. $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha // \beta$

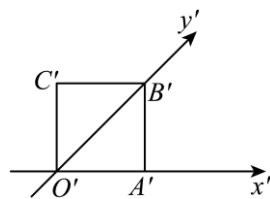
3. 已知 a, b, l 是三条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, $\alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则下列结论正确的是（ ）

- A. 若 $a // \beta$, 则 $a // l$
- B. 若 $a \perp b, a \perp l$, 则 $\alpha \perp \beta$
- C. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $a \perp \beta$
- D. a, b 一定是异面直线

4. 如图所示, 一个水平放置的四边形 $OABC$ 的斜二测画法的直观图

是边长为 2 的正方形 $O'A'B'C'$, 则原四边形 $OABC$ 的面积是（ ）

- A. $16\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. 16 D. 8

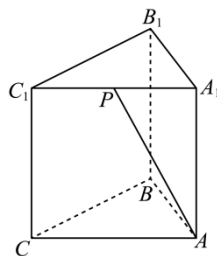


5. 著名的古希腊数学家阿基米德一生最为满意的一个数学发现就是

“圆柱容球”定理: 把一个球放在一个圆柱形的容器中, 如果盖上容器的上盖后, 球恰好与圆柱的上、下底面和侧面相切 (该球也被称为圆柱的内切球), 那么此时圆柱的内切球体积与圆柱体积之比为定值, 则该定值为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 ABC 是等腰直角三角形,

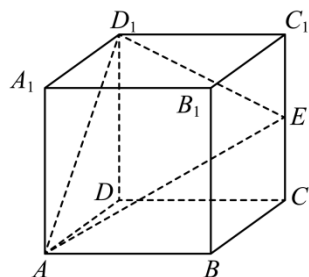


$AB \perp BC$, $AB = CC_1$, P 是 A_1C_1 的中点, 则异面直线 BC 与 AP 所成角的余弦值为 ()

- A. 0 B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{30}}{6}$

7. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 CC_1 的中点, 过 A, D_1, E 三点的截面把正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 分成两部分, 则该截面的周长为 ()

- A. $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3$
C. $\frac{9}{2}$ D. $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2$



8. 在《九章算术》中, 将四个面都是直角三角形的四面体称鳖臑. 在鳖臑 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, 且 $AB = BC = CD = 2$, 则鳖臑 $A-BCD$ 外接球的表面积为 ()

- A. $\frac{19}{3}\pi$ B. 6π C. 12π D. 16π

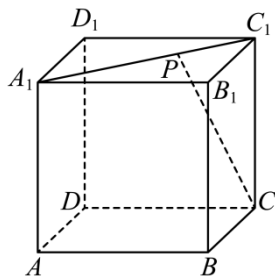
二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分. 在每小题有多项符合题目要求, 漏选得 2 分, 错选得 0 分)

9. 下面关于空间几何体的表述, 正确的是 ()

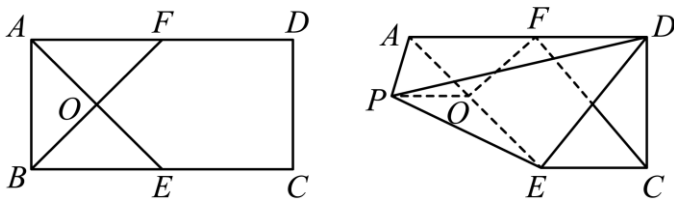
- A. 直角三角形以其一边所在直线为旋转轴, 旋转一周形成的面所围成的几何体是圆锥
B. 圆锥的顶点、底面圆的圆心与圆锥底面圆周上任意一点, 这三点的连线都可以构成直角三角形
C. 用一个平面去截棱锥, 底面和截面之间的部分叫做棱台
D. 从三棱柱的 6 个顶点中选取 4 个不共面的点, 这 4 点形成的三棱锥的体积一定是三棱柱体积的 $\frac{1}{3}$

10. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 为线段 A_1C_1 上的一个动点 (不包含端点), 则 ()

- A. $PC \perp BD$
B. 直线 PC 与直线 BB_1 异面
C. 存在点 P 使得 PC 与 DD_1 所成的角为 60°
D. 存在点 P 使得 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 60°



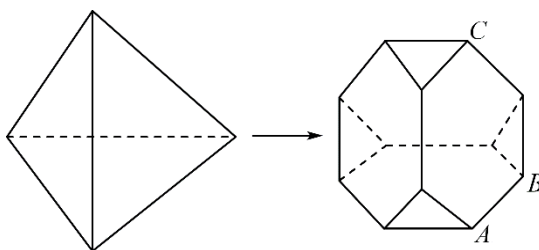
11. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别为 BC 、 AD 的中点, 且 $BC = 2AB = 2$, $BF \cap AE = O$, 现将 $\triangle ABE$ 沿 AE 向上翻折, 使 B 点移到 P 点, 则在翻折过程中, 下列结论正确的是 ()



- A. $CF \perp OP$ B. 存在点 P , 使得 $PE \parallel CF$
C. 存在点 P , 使得 $PE \perp ED$ D. 三棱锥 $P-AED$ 的体积最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

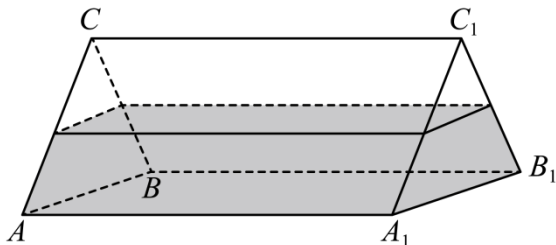
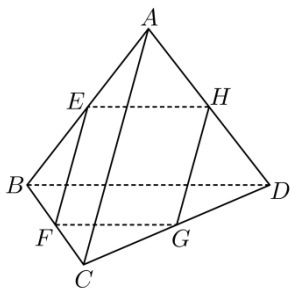
12. 半正多面体亦称“阿基米德体”，是由边数不全相同的正多边形为面的多面体. 如图，将正四面体每条棱三等分，截去顶角所在的小正四面体，得到一个有八个面的半正多面体. 点 A 、 B 、 C 是该多面体的三个顶点，且棱长 $AB=2$ ，则下列结论正确的是（ ）

- A. 该多面体的表面积为 $24\sqrt{3}$
- B. 该多面体的体积为 $\frac{46\sqrt{2}}{3}$
- C. 该多面体的外接球的表面积为 22π
- D. 若点 M 是该多面体表面上的动点, 满足 $CM \perp AB$ 时, 点 M 的轨迹长度为 $4+4\sqrt{3}$



三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 如图, 已知空间四边形 $ABCD$ 两对角线 AC 和 BD 的长分别为 8 和 10, 所成的角为 60° , 依次连接各边中点所得四边形 $EFGH$ 的面积是_____;

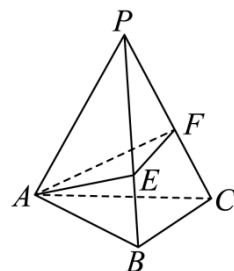


14. 如图，一个直三棱柱容器中盛有水，且侧棱 $AA_1 = 16$ ．若侧面 AA_1B_1B 水平放置时，液面恰好过 AC, BC, A_1C_1, B_1C_1 的中点．当底面 ABC 水平放置时，液面高为_____．

15. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA=PB=PC=8$ ，

$\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 40^\circ$ ，过点 A 作截面，分别交侧棱 PB ， PC

于 E ， F 两点，则 $\triangle AEF$ 周长的最小值为_____.



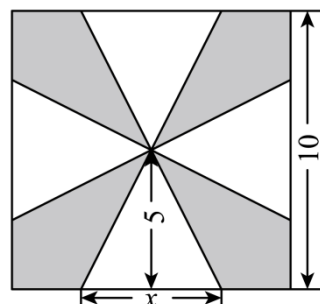
16. 如图所示，一块边长为 10cm 的正方形铁片上有四块阴影部分，

将这些阴影部分裁下来，然后将余下的四个全等的等腰三角形

组成一个正四棱锥、若正四棱锥的各顶点都在同一球面上，底面

边长为 x (单位: cm)，且 $x \in [6, 8]$ ，则该球的半径 R (单位:

cm) 的取值范围是_____.

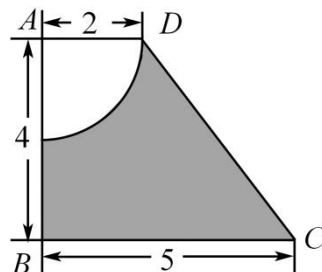


四、解答题 (本大题共 6 小题，共 70.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

17. 如图，已知在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=2$ ， $AB=4$ ， $BC=5$ ，若将该图形

中阴影部分绕 AB 所在直线旋转一周，求形成的几何体的表面

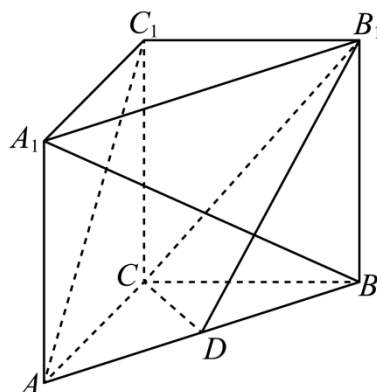
积与体积.



18. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ， $AC=BC=CC_1$ ，点 D 是 AB 的中点.

求证: (1) $AC_1 \parallel$ 平面 B_1CD ;

(2) $A_1B \perp B_1C$.

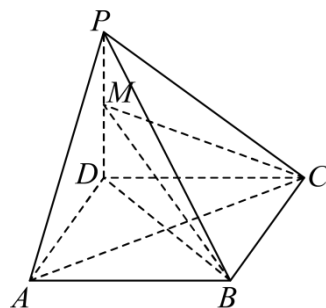


19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 的边长均为 2，且

$\angle BAD = 60^\circ, PD \perp DC, PB \perp AC$ ，棱 PD 的中点为 M 。

(1) 求证： $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若 $\triangle PDB$ 的面积是 $2\sqrt{6}$ ，求点 P 到平面 BCM 的距离。

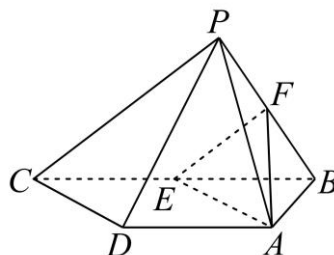


20. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $AB = AD$

$BC = 2AB$ ， E, F 分别为棱 BC, BP 中点。

(1) 求证：平面 $AEF \parallel$ 平面 DCP ；

(2) 若平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$ ，直线 AP 与平面 PBC 所成的角为 45° ，且 $CP \perp PB$ ，求二面角 $P-AB-C$ 的大小。

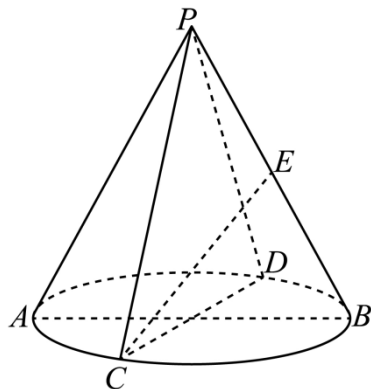


21. 如图, P 为圆锥的顶点, AB , CD 为底面圆两条互相垂直的直径, E 为 PB 的中点.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD .

(2) 若 $AB=4$, 且直线 CE 与平面 PCD 所成角的正切值为

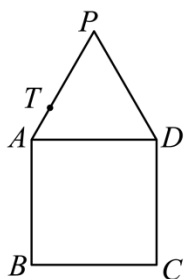
$\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求该圆锥的体积.



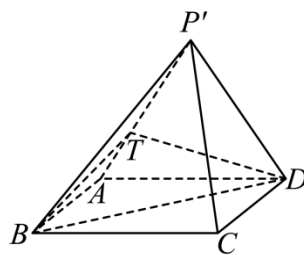
22. 如图①所示, 已知正三角形 ADP 与正方形 $ABCD$, 将 $\triangle ADP$ 沿 AD 翻折至 $\triangle ADP'$ 所在的位置, 连接 $P'B$, $P'C$, 得到如图②所示的四棱锥. 已知 $AB=2$, $P'B=2\sqrt{2}$, T 为 AP 上一点, 且满足 $PT=2AT$.

(1) 求证: $CD \perp$ 平面 $P'AD$;

(2) 在线段 $P'D$ 上是否存在一点 Q , 使得 $CQ \parallel$ 平面 BDT . 若存在, 指出点 Q 的位置, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.



①



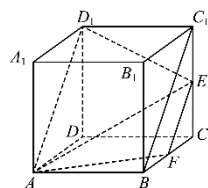
②

中山市第一中学 2022-2023 学年第二学期高一数学单元检测二参考答案:

1.C 2.D 3.A 4.B 5.D 6.C 7.A 8.C 9.BD 10.ABD 11.ACD 12.BCD

13. $10\sqrt{3}$ 14. 12 15. $8\sqrt{3}$ 16. $\left[\frac{17}{4}, \frac{41}{6}\right]$

7. 【详解】如图，取 BC 的中点 F ，连接 EF ， AF ， BC_1 ，



E 、 F 分别为棱 CC_1 、 BC 的中点，则 $EF \parallel BC_1$ ，正方体中 $BC_1 \parallel AD_1$ ，则有

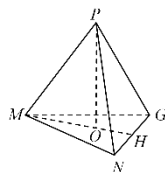
$EF \parallel AD_1$ ，所以平面 $AFED_1$ 为所求截面，因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以 $EF = \sqrt{2}$ ，

$D_1E = AF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ， $AD_1 = 2\sqrt{2}$ ，所以四边形 $AFED_1$ 的周长为 $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ 。

12. 对于 A 选项，因为 $AB = 2$ ，“阿基米德体”一共有八个面，其中四个面是边长为 2 的正六边形，四个面是

边长为 2 的正三角形，因此表面积为 $S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 + 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = 28\sqrt{3}$ ；

对于 B 选项，如图，在棱长为 a 的正四面体 $P-MNG$ 中，设顶点 P 在底面 MNG 的射影点为点 O ，延长 MO 交 NG 于点 H ，则 H 为 GN 的中点，



因为 $\triangle MNG$ 为等边三角形，则 $MH \perp NG$ ，且 $MH = \sqrt{MN^2 - NH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

$MO = \frac{2}{3}MH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，因为 $PO \perp$ 平面 MNG ， $MO \subset$ 平面 MNG ，所以 $PO \perp MO$ ，

故 $PO = \sqrt{PM^2 - MO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ， $V_{P-MNG} = \frac{1}{3}S_{\triangle MNG} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ，

因为“阿基米德体”是在棱长为 6 的正四面体上截去了 4 个棱长为 2 的正四面体，

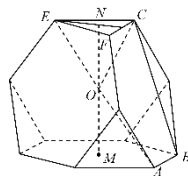
因此，“阿基米德体”的体积为 $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \times 2^3 = \frac{46\sqrt{2}}{3}$ ，

对于 C 选项，设等边 $\triangle CEF$ 的中心为 N ，与平面 CEF 平行的底面正六边形的中心记

为点 M ，则 $MN \perp$ 平面 CEF ，原正四面体（棱长为 6）的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3} \times 6 = 2\sqrt{6}$ ，则

$MN = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，由题意可知，“阿基米德体”的外接球球心 O 在 MN 上，

易知 $EN = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，即正 $\triangle CEF$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，底面正六边形的外接圆半径为 2，



设 $ON = d$ ，“阿基米德体”的外接球半径为 R ，则 $R^2 = d^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left|\frac{4\sqrt{6}}{3} - d\right|^2 + 2^2$ ，

解得 $d = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ ，则 $R^2 = \left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{11}{2}$ ，表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{11}{2} = 22\pi$ ，C 对；

对于 D 选项，如图所示：由正六边形的几何性质可知 $\angle ABK = \angle BKC = 120^\circ$ ，

即 $BC \perp AB$, 同理可知 $BQ \perp AB$,

因为 $CQ \subset$ 平面 BCQ , 所以, $AB \perp CQ$,

由余弦定理可得 $BC = 2\sqrt{3}$, $BQ = 2\sqrt{3}$, 易知 $CQ = 4$, 点 M 的轨迹长度为 $BC + BQ + CQ = 4\sqrt{3} + 4$

$$OF = \frac{x}{2} \text{ cm}, \quad OB = \frac{\sqrt{2}}{2} x \text{ cm}, \quad OE = \sqrt{EF^2 - OF^2} = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} \text{ cm},$$

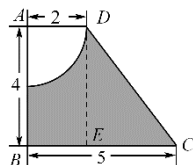
在直角 $\triangle O_1OB$ 中, $O_1O^2 = (OE - R)^2 = R^2 - OB^2$, 即 $\left(\sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} - R\right)^2 = R^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2$, $x \in [6, 8]$

设 $t = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}}$, $t \in [3, 4]$, 则 $(t - R)^2 = 50 - 2t^2 + R^2$, 整理得 $2R = \frac{50}{t} - t$, 因为 $y = \frac{50}{t} - t$ 在区间

[3,4]上单调递减, 所以 $\frac{17}{2} \leq \frac{50}{t} - t \leq \frac{41}{3}$, 即 $\frac{17}{2} \leq 2R \leq \frac{41}{3}$, $R \in \left[\frac{17}{4}, \frac{41}{6} \right]$.

在直角梯形 $ABCD$ 中, 过 D 点作 $DE \perp BC$, 垂足为 E , $CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = 5$,

所以 $S_{\text{半球}} = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 2^2 = 8\pi$, $S_{\text{圆台侧}} = \pi(2+5) \times 5 = 35\pi$, $S_{\text{圆台下底}} = 25\pi$, $\therefore$



$$S_{\text{表}} = 8\pi + 35\pi + 25\pi = 68\pi.$$

因为圆台的体积 $V = \frac{1}{3} \left(\pi \times 2^2 + \sqrt{(\pi \times 2^2)(\pi \times 5^2)} + \pi \times 5^2 \right) \times 4 = 52\pi$,

半球的体积 $V_1 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$ ，所以所求几何体的体积为 $V - V_1 = \frac{140}{3}\pi$ 。

$\because$ 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $CC_1=BC$, $\therefore$ 四边形 BCC_1B_1 为正方形,

$\therefore E$ 为 BC_1 中点, 又 $\because D$ 是 AB 的中点, $\therefore DE \parallel AC_1$.

$\because DE \subset \text{平面 } B_1CD, AC_1 \not\subset \text{平面 } B_1CD, \therefore AC_1 \parallel \text{平面 } B_1CD.$

(2) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $CC_1 \perp AC$,

又 $AC \perp BC$, $BC \cap CC_1 = C$, $BC, CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 又 $AC \parallel A_1C_1$, 所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

又 $B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $A_1C_1 \perp B_1C$,

又四边形 BCC_1B_1 为正方形, 所以 $BC_1 \perp B_1C$,

又 $A_1C_1 \cap BC_1 = C_1$, $A_1C_1, BC_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以 $B_1C \perp$ 平面 A_1C_1B ,

$A_1B \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以 $A_1B \perp B_1C$.

19. (1) 因为 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$.

又因为 $AC \perp PB, PB \cap BD = B$, $PB, BD \subset$ 平面 PBD , 所以 $AC \perp$ 平面 PBD .

因为 $PD \subset$ 平面 PBD , 所以 $PD \perp AC$.

又由已知 $PD \perp DC, AC \cap DC = C$, $AC, DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 因为 M 为 PD 的中点, 所以点 P 到平面 MCB 的距离等于点 D 到平面 MCB 的距离.

由 (1) 知, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot PD = 2\sqrt{6}$.

又因为 $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $BD = 2$, 所以 $PD = 2\sqrt{6}$, 则 $MD = \frac{1}{2}PD = \sqrt{6}$.

设点 D 到平面 BCM 的距离为 d , 由题意 $V_{M-BCD} = V_{D-BCM}$.

因为 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 所以 $V_{M-BCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot MD = \sqrt{2}$.

在 $\triangle MCB$ 中, $MB = \sqrt{10}$, $MC = \sqrt{10}$, $BC = 2$, $S_{\triangle MCB} = 3$

所以 $V_{D-MCB} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle MCB} \cdot d = \sqrt{2}$, 解得 $d = \sqrt{2}$.

20. (1) $\because E$ 为 BC 中点, $BC = 2AB = 2AD$, $AD \parallel BC$, $\therefore AD \parallel CE$, $AD = CE$,

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形, $\therefore AE \parallel CD$,

$\because AE \not\subset$ 平面 DCP , $CD \subset$ 平面 DCP , $\therefore AE \parallel$ 平面 DCP ;

$\because E, F$ 分别为 BC, BP 中点, $\therefore EF \parallel CP$,

$\because EF \not\subset$ 平面 DCP , $CP \subset$ 平面 DCP , $\therefore EF \parallel$ 平面 DCP ;

$\because AE \cap EF = E$, $AE, EF \subset$ 平面 AEF , $\therefore$ 平面 $AEF \parallel$ 平面 DCP .

(2) $\because$ 面 $PBC \cap$ 面 $ABCD = BC$, 面 $PBC \perp$ 面 $ABCD$, $AB \subset$ 面 $ABCD$, $AB \perp BC$,

$\therefore AB \perp$ 面 PBC , $\therefore \angle APB$ 即为直线 AP 与平面 PBC 所成角, 即 $\angle APB = 45^\circ$;

设 $AB = AD = 1$, 则 $BC = 2$,

$\because AB \perp$ 平面 PBC , $PB \subset$ 平面 PBC , $\therefore AB \perp PB$, $\therefore PB = AB = 1$;

$\because BC \perp AB$, $PB \perp AB$, $BC \subset$ 平面 ABC , $PB \subset$ 平面 PAB , 平面 $ABC \cap$ 平面 $PAB = AB$,

$\therefore \angle PBC$ 即为二面角 $P-AB-C$ 的平面角,

$\because CP \perp PB, \therefore \cos \angle PBC = \frac{PB}{BC} = \frac{1}{2}, \therefore \angle PBC = \frac{\pi}{3}$, 即二面角 $P-AB-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

21. (1) 设 AB 与 CD 交于点 O , 连接 PO ,

因为 AB, CD 为底面圆两条互相垂直的直径, 所以 O 为底面圆的圆心,

所以 PO 为圆锥的高, 所以 $PO \perp$ 底面圆,

因为 $CD \subset$ 底面圆, 所以 $PO \perp CD$,

又 $AB \perp CD, AB \cap PO = O, AB, PO \subset$ 平面 PAB ,

所以 $CD \perp$ 平面 PAB ,

因为 $CD \subset$ 平面 PCD , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ;

(2) 过 E 作 $EF \perp PO$ 于 F , 连接 CF .

由 (1) 知平面 $PAB \perp$ 平面 PCD , 且平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = PO$,

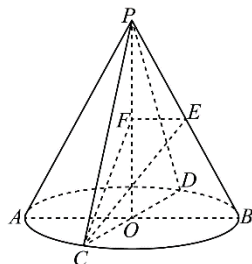
所以 $EF \perp$ 平面 PCD ,

所以 $\angle ECF$ 为直线 CE 与平面 PCD 所成的角, 则 $\tan \angle ECF = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

因为 $AB = 4$, 所以 $EF = \frac{1}{2}OB = 1$, 所以 $\tan \angle ECF = \frac{EF}{CF} = \frac{1}{CF} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

则 $CF = \sqrt{5}$, 所以 $PO = 2OF = 2\sqrt{5-2^2} = 2$,

故该圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2 = \frac{8\pi}{3}$.



22. (1) $\triangle P'AD$ 是正三角形, 有 $P'A = AB = 2$,

$\triangle P'AB$ 中, $P'A^2 + AB^2 = 8 = P'B^2$, 则 $AB \perp P'A$,

正方形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD, P'A \cap AD = A, P'A, AD \subset$ 平面 $P'AD$,

所以 $AB \perp$ 平面 $P'AD$, 而 $CD \parallel AB$,

所以 $CD \perp$ 平面 $P'AD$.

(2) 点 Q 为线段 $P'D$ 的中点, $CQ \parallel$ 平面 BDT ,

取 $P'T$ 的中点 N , 连接 CQ, NQ, CN , 连接 $AC \cap BD = O$, 连接 OT , 如图,

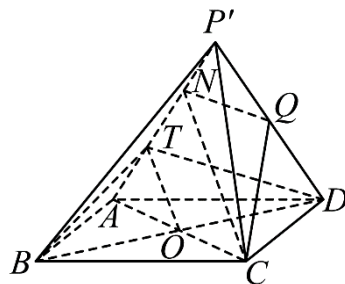
于是 $NQ \parallel TD$, 而 $TD \subset$ 平面 $BDT, NQ \not\subset$ 平面 BDT , 因此 $NQ \parallel$ 平面 BDT ,

依题意, T 为 $P'A$ 上一点, 且满足 $P'T = 2AT$, 则 T 为 NA 中点, 又 O 为 AC 中点, 即有 $OT \parallel CN$,

而 $TO \subset$ 平面 $BDT, CN \not\subset$ 平面 BDT , 因此 $CN \parallel$ 平面 BDT , 又 $CN \cap NQ = N, CN, NQ \subset$ 平面 CQN ,

从而平面 $CQN \parallel$ 平面 BDT , 又 $CQ \subset$ 面 CQN , 则 $CQ \parallel$ 平面 BDT ,

所以点 Q 为线段 $P'D$ 的中点时, $CQ \parallel$ 平面 BDT .



参考答案:

1. C

【分析】由公理 2 可判断命题①, ②; 由公理 3 可判断命题③; 如果两条直线没有交点, 则这两条直线平行或异面可判断命题④.

【详解】对于□, 当三点共线时, 确定的平面有无数个, 故错误;

对于□, 当圆心和圆上的两点满足三点共线时, 确定的平面有无数个, 故错误;

对于□, 如果两个平面相交有一个交点, 则必有经过该点的一条直线, 该直线为交线, 故正确; 对于选项□,

如果两条直线没有交点, 则这两条直线平行也可能是异面直线, 故错误, 所以不正确的命题有 3 个.

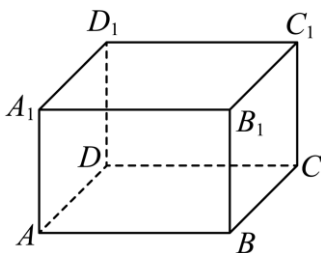
故选: C.

2. D

【分析】举例说明判断 ABC; 利用线面垂直的性质判断 D 作答.

【详解】对于 A, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABCD$ 为平面 α , A_1B_1, B_1C_1 分别为直线 m, n ,

显然满足 $m \perp n, n // \alpha$, 而 $m // \alpha$, 此时 $m \perp \alpha$ 不成立, A 错误;



对于 B, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABCD$, 平面 CDD_1C_1 分别为平面 α, β , A_1B_1 为直线 m ,

显然满足 $m // \beta, \beta \perp \alpha$, 而 $m // \alpha$, 此时 $m \perp \alpha$ 不成立, B 错误;

对于 C, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABCD$, 平面 CDD_1C_1 分别为平面 α, β , CC_1 为直线 m ,

显然满足 $m \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 而 $m \subset \beta$, 此时 $m // \beta$ 不成立, C 错误;

对于 D, 因为 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 由线面垂直的性质知, $\alpha // \beta$, D 正确.

故选: D

3. A

【分析】对于选项 A, 利用线面平行的性质即可判断出结果的正误; 对于选项 BCD, 利用长方体中的点线面的位置关系, 逐一对各个选项分析判断即可得出结果.

【详解】选项 A, 因为 $a // \beta, a \subset \alpha, \alpha \cap \beta = l$, 所以 $a // l$, 所以选项 A 正确;

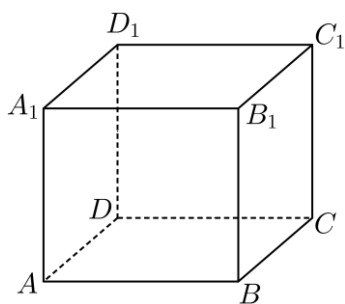
选项 B, 如图, 在长方体中, 取平面 $ABCD$ 为平面 α , 平面 A_1BCD_1 为平面 β , 则

$\alpha \cap \beta = BC$, 取直线 AB 为 a , 直线 A_1D_1 为 b ,

显然有 $\vec{a} \perp \vec{b}, a \perp l$, 但 α 与 β 不垂直, 所以选项 B 错误;

选项 C, 如图, 取平面 $ABCD$ 为平面 α , 平面 A_1ABB_1 为平面 β , 则 $\alpha \cap \beta = AB$, 取直线 CD 为 a , 此时有 $\alpha \perp \beta$, 但 $a // \beta$, 所以选项 C 错误;

选项 D, 如图, 取平面 $ABCD$ 为平面 α , 平面 A_1ABB_1 为平面 β , 则 $\alpha \cap \beta = AB$, 取直线 AB 为 a , 直线 A_1B_1 为 b , 此时 $a // b$, 所以选项 D 错误.



故选: A.

4. B

【分析】根据斜二测画法规则求出 AO, BO , 判断 $OABC$ 的形状, 确定 $OA \perp OB$, 由此求出原四边形 $OABC$ 的面积.

【详解】在正方形 $O'A'B'C'$ 中可得 $B'O' = \sqrt{2}A'O' = 2\sqrt{2}$,

由斜二测画法可知 $BO = 2B'O' = 4\sqrt{2}$, $AO = A'O' = 2$,

且 $OA \perp OB$, $OA \parallel BC, AB \parallel CO$,

所以四边形 $OABC$ 为平行四边形,

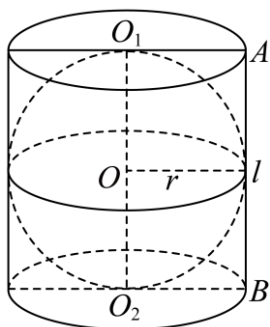
所以 $S_{OABC} = BO \cdot AO = 4\sqrt{2} \times 2 = 8\sqrt{2}$.

故选: B.

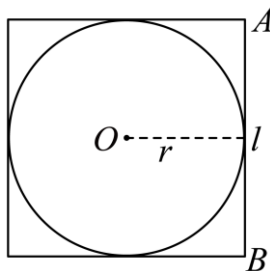
5. D

【分析】根据已知条件可得 $l = 2r$, 结合圆柱与球的体积公式计算即可.

【详解】设圆柱的母线长为 l , 内切球的半径为 r , 如图所示,



则其轴截面如图所示,



则 $l = 2r$,

所以圆柱的内切球体积为 $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$, 圆柱体积为 $V_2 = sh = \pi r^2 l = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$,

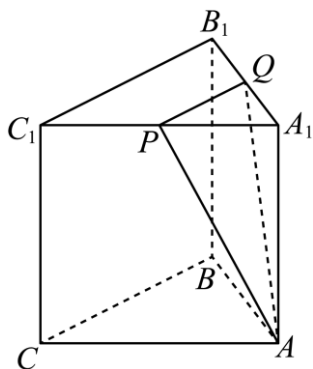
所以圆柱的内切球体积与圆柱体积之比为 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$.

故选: D.

6. C

【分析】取 A_1B_1 的中点 Q , 连接 PQ , AQ , 根据 $BC \parallel PQ$, 得到 $\angle APQ$ 为异面直线 BC 与 AP 所成的角求解.

【详解】解：如图，



取 A_1B_1 的中点 Q ，

连接 PQ ， AQ ，则 $BC \parallel PQ$ ，所以 $\angle APQ$ 或其补角即为异面直线 BC 与 AP 所成的角，

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，且平面 $ABC \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BC$ ，

$$A_1B_1 \perp B_1C_1,$$

所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 B_1BAA_1 ， $PQ \perp$ 平面 B_1BAA_1 ，所以 $PQ \perp AQ$ ，

依据题意，不妨设 $AB = CC_1 = 2$ ，则 $AQ = \sqrt{5}$ ， $PQ = 1$ ， $AP = \sqrt{6}$ ，

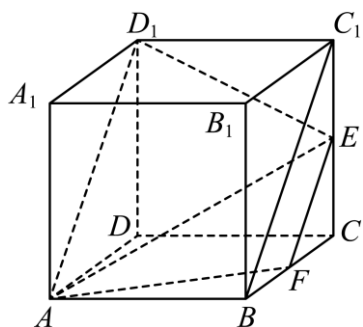
$$\text{所以 } \cos \angle APQ = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

故选：C

7. A

【分析】画出截面图形，利用已知条件，转化求解截面周长即可．

【详解】如图，取 BC 的中点 F ，连接 EF ， AF ， BC_1 ，



E 、 F 分别为棱 CC_1 、 BC 的中点，则 $EF \parallel BC_1$ ，正方体中 $BC_1 \parallel AD_1$ ，则有 $EF \parallel AD_1$ ，所以平

面 $AFED_1$ 为所求截面，

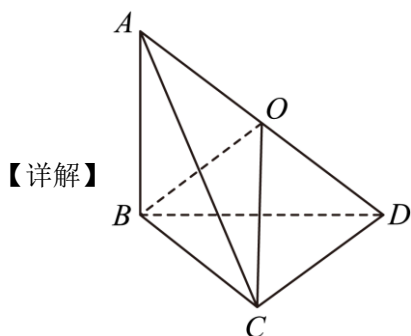
因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以 $EF = \sqrt{2}$ ， $D_1E = AF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

$AD_1 = 2\sqrt{2}$ ，所以四边形 $AFED_1$ 的周长为 $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ 。

故选：A.

8. C

【分析】如图，取 AD 的中点为 O ，连接 BO, CO ，可证 O 为三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心，故可求外接球的表面积。



如图，取 AD 的中点为 O ，连接 BO, CO ，

因为 $AB \perp$ 平面 BCD ， $BD \subset$ 平面 BCD ，故 $AB \perp BD$ ，

同理 $AB \perp CD$ 。

因为 AD 的中点为 O ，故 $OA = OB = OD$ 。

而 $BC \perp CD$ ， $BC \cap AB = B, BC, AB \subset$ 平面 ABC ，故 $BC \perp$ 平面 ABC ，

而 $AC \subset$ 平面 ABC ，故 $CD \perp AC$ ，

故 $OC = DO$ ，所以 O 为三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心，

又 $AB = BC = CD = 2$ ，故 $BD = 2\sqrt{2}$ ，所以 $AD = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$ ，

故三棱锥 $A-BCD$ 外接球半径为 $\sqrt{3}$ ，故其外接球的表面积为 12π 。

故选：C.

9. BD

【分析】根据旋转体的概念即可判断 A；根据圆锥的结构特征，即可判断 B；根据棱台的概念即可判断 C；根据同底等高的三棱锥与三棱柱的联系，即可判断 D。

【详解】A：当直角三角形以斜边所在直线为旋转轴，其余两边旋转一周形成的面所围成的几

何体是两个圆锥的组合体，故 A 错误；

B：圆锥的顶点、底面圆的圆心与圆锥底面圆周上任意一点，这三点的连线都可以构成直角三角形，故 B 正确；

C：用平行于底面的一个平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫做棱台，故 C 错误；

D：从三棱柱的 6 个顶点中选取 4 个不共面的点，这 4 点形成的三棱锥与三棱柱同底等高，所以三棱锥的体积为三棱柱体积的 $\frac{1}{3}$ ，故 D 正确.

故选：BD.

10. ABD

【分析】由线面垂直的判定定理可判断 A；证明 $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ， $PC \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 ，可判断 B；求出 PC 与 DD_1 所成的角的最大值恒小于 60° 可判断 C；求出 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 60° 时， C_1P 的长度可判断 D.

【详解】对 A，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，易得 $BD \perp AC$ ， $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ，

$\therefore BD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore AA_1 \perp BD$ ，

$AC \cap AA_1 = A$ ， $AC, AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，则 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，

因为 $PC \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，所以 $BD \perp PC$ ，故 A 正确；

对 B，因为 $P \notin$ 平面 BCC_1B_1 ， $C \in$ 平面 BCC_1B_1 ， $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，且 $C \notin BB_1$ ，

所以直线 PC 与直线 BB_1 异面，故 B 正确；

对 C，因为 $CC_1 \parallel DD_1$ ，所以 PC 与 DD_1 所成的角即为 PC 与 CC_1 所成的角，

由图可知，当点 P 位于点 A_1 处时， $\angle PCC_1$ 最大，此时 $\cos \angle PCC_1 = \frac{CC_1}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ ，

所以 PC 与 DD_1 所成的角恒小于 60° ，故 C 不正确；

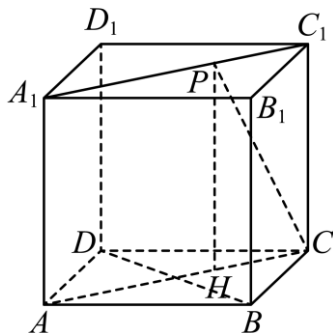
对 D，过点 P 作 $PH \perp$ 平面 $ABCD$ 交直线 AC 于点 H ，则 $PH \parallel AA_1$ ，

设正方体的边长为 1， PC 与底面 $ABCD$ 所成的角即为 $\angle PCH$ ，

若 $\angle PCH = 60^\circ$ ，则 $\tan \angle PCH = \frac{PH}{CH} = \frac{1}{CH} = \sqrt{3}$ ，

则 $CH = \frac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{2}$ ，所以存在点 P 使得 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 60° 。

故 D 正确。



故选：ABD.

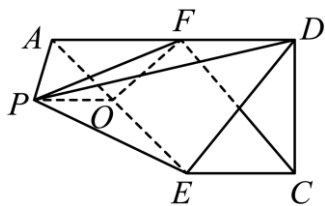
11. ACD

【分析】根据给定条件，利用平面图形翻折前后折线两侧量的关系，结合线线垂直、平行的判定判断 BC；由线面垂直推理判断 C；求出锥体体积最大值判断 D 作答。

【详解】依题意， $AF \parallel EC, AF = EC$ ，则四边形 $AECF$ 为平行四边形，有 $CF \parallel AE$ ，而 $AF = AB = BE$ ， $\angle BAF = \angle ABE = 90^\circ$ ，即有 $\angle ABO = \angle BAO = 45^\circ$ ，因此 $BF \perp AE$ ，即 $OP \perp AE$ ，因此 $CF \perp OP$ ，A 正确；

因为 $PE \cap AE = E$ ， $CF \parallel AE$ ，因此 PE, CF 不平行，即不存在点 P ，使得 $PE \parallel CF$ ，B 错误；

连接 PF ，当 $PF = 1$ 时，因为 $PO = FO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $PO^2 + FO^2 = 1 = PF^2$ ，则 $PO \perp FO$ ，



而 $FO \perp AE$ ， $PO \cap AE = O, PO, AE \subset$ 平面 PAE ，因此 $FO \perp$ 平面 PAE ，又 O, F 分别为 AE, AD 的中点，

即 $ED \parallel FO$ ，于是 $ED \perp$ 平面 PAE ，而 $PE \subset$ 平面 PAE ，则 $PE \perp ED$ ，C 正确；

在翻折过程中，令 PO 与平面 AED 所成角为 θ ，则点 P 到平面 AED 的距离

$$h = PO \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta,$$

又 $\triangle AED$ 的面积 $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}AD \cdot AB = 1$ ，因此三棱锥 $P-AED$ 的体积

$$V_{P-AED} = \frac{1}{3}S_{\triangle AED} \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{6},$$

当且仅当 $\theta = 90^\circ$ ，即 $PO \perp$ 平面 AED 时取等号，所以三棱锥 $P-AED$ 的体积最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ，D

正确.

故选：ACD

12. BCD

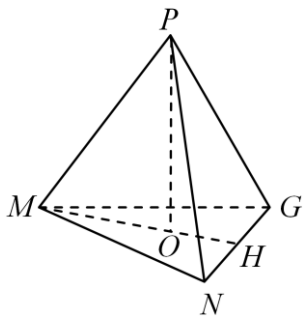
【分析】计算出该多面体的表面积和体积，可判断 AB 选项；作出图形，根据几何关系计算出该多面体的外接球半径，利用球体表面积公式可判断 C 选项；找出与 AB 垂直的直线，可求出点 M 的轨迹长度，可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，因为 $AB = 2$ ，“阿基米德体”一共有八个面，

其中有四个面是边长为 2 的正六边形，有四个面是边长为 2 的正三角形，

因此，“阿基米德体”的表面积为 $S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 + 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = 28\sqrt{3}$ ，A 错；

对于 B 选项，如下图所示，在棱长为 a 的正四面体 $P-MNG$ 中，设顶点 P 在底面 MNG 的射影点为点 O ，



延长 MO 交 NG 于点 H ，则 H 为 GN 的中点，

因为 $\triangle MNG$ 为等边三角形，则 $MH \perp NG$ ，且 $MH = \sqrt{MN^2 - NH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

易知点 O 为 $\triangle MNG$ 的中心，则 $MO = \frac{2}{3}MH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，

因为 $PO \perp$ 平面 MNG ， $MO \subset$ 平面 MNG ，所以， $PO \perp MO$ ，

$$\text{故 } PO = \sqrt{PM^2 - MO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

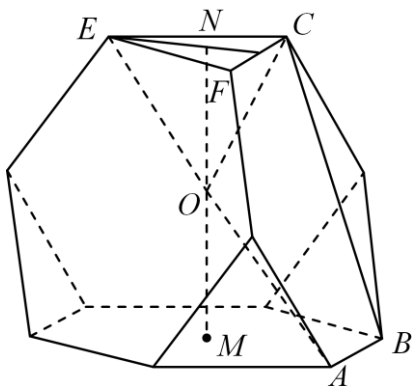
$$V_{P-MNG} = \frac{1}{3} S_{\triangle MNG} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3,$$

即棱长为 a 的正四面体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$,

因为“阿基米德体”是在棱长为6的正四面体上截去了4个棱长为2的正四面体,

因此,“阿基米德体”的体积为 $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \times 2^3 = \frac{46\sqrt{2}}{3}$, B 对;

对于 C 选项, 设等边 $\triangle CEF$ 的中心为 N , 与平面 CEF 平行的底面正六边形的中心记为点 M ,



则 $MN \perp$ 平面 CEF ,

原正四面体(棱长为6)的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3} \times 6 = 2\sqrt{6}$, 则 $MN = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$,

由题意可知,“阿基米德体”的外接球球心 O 在直线 MN 上,

易知 $EN = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即正 $\triangle CEF$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

底面正六边形的外接圆半径为2,

设 $ON = d$, “阿基米德体”的外接球半径为 R , 则 $R^2 = d^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left|\frac{4\sqrt{6}}{3} - d\right|^2 + 2^2$,

解得 $d = \frac{5\sqrt{6}}{6}$, 则 $R^2 = \left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{11}{2}$,

因此, 该多面体的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{11}{2} = 22\pi$, C 对;

对于 D 选项, 如下图所示:

边形, 且 $EH = FG = \frac{1}{2}BD = 5$, $EF = GH = \frac{1}{2}AC = 4$, 根据 AC 与 BD 所成角为 60° 得到平行四边形 $EFGH$ 的一个内角为 60° , 然后求面积即可.

【详解】因为 E, H, G, F 分别为 AB, AD, CD, BC 中点,

所以 $EH \parallel BD \parallel FG$, $EF \parallel AC \parallel HG$, 且 $EH = FG = \frac{1}{2}BD = 5$, $EF = GH = \frac{1}{2}AC = 4$,

所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形,

因为 AC 与 BD 所成角为 60° , 所以平行四边形 $EFGH$ 的一个内角为 60° ,

所以 $S_{EFGH} = 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$.

故答案为: $10\sqrt{3}$.

14. 12

【分析】根据给定条件利用柱体体积公式求出水的实际体积, 再由两种情况的放置水的体积相同求解作答.

【详解】设 $\triangle ABC$ 的面积为 a , 底面 ABC 水平放置时, 液面高为 h ,

侧面 AA_1B_1B 水平放置时, 水的体积为 $V = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{3}{4}a \cdot 16 = 12a$

当底面 ABC 水平放置时, 水的体积为 $V = S_{\triangle ABC}h = ah$, 于是 $ah = 12a$, 解得 $h = 12$,

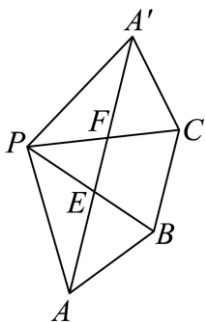
所以当底面 ABC 水平放置时, 液面高为 12.

故答案为: 12

15. $8\sqrt{3}$

【分析】沿着侧棱 PA 把三棱锥 $P-ABC$ 展开在一个平面内, 如图, 则 AA' 即为 $\triangle AEF$ 周长的最小值, 在 $\triangle PAA'$ 中, 由余弦定理能求出 AA' 的值.

【详解】如图, 沿着侧棱 PA 把三棱锥 $P-ABC$ 展开在一个平面内, 如图所示:



则 AA' 即为 $\triangle AEF$ 的周长的最小值,

在 $\triangle PAA'$ 中, $\angle APA' = 3 \times 40^\circ = 120^\circ$, $PA = A'P = 8$,

由余弦定理得: $AA' = \sqrt{PA^2 + A'P^2 - 2PA \cdot A'P \cos 120^\circ} = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{3}$.

故答案为: $8\sqrt{3}$.

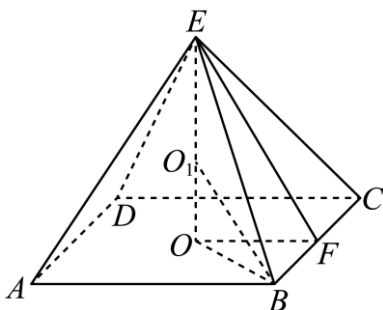
16. $\left[\frac{17}{4}, \frac{41}{6}\right]$

【分析】作出正四棱锥, 正四棱锥的外接球的球心在正四棱锥的高线上, 根据勾股定理表示外接球的半径 R 与 x 的关系, 再求出 R 的取值范围.

【详解】由题意, 作出正四棱锥, 如图所示, 记 F 为 BC 的中点, 连结 EF , 可知 $BC = x \text{ cm}$, $EF = 5 \text{ cm}$, 四边形 $ABCD$ 为正方形.

记 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 连结 OF, OE, OB , 则 $OE \perp$ 平面 $ABCD$,

$$OF = \frac{x}{2} \text{ cm}, \quad OB = \frac{\sqrt{2}}{2} x \text{ cm}, \quad OE = \sqrt{EF^2 - OF^2} = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} \text{ cm},$$



记正四棱锥的外接球的球心为 O_1 , $O_1E = O_1B = R \text{ cm}$,

在直角 $\triangle O_1OB$ 中, $O_1O^2 = (OE - R)^2 = R^2 - OB^2$, 即 $\left(\sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} - R\right)^2 = R^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2$, $x \in [6, 8]$

设 $t = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}}$, $t \in [3, 4]$, 则 $(t - R)^2 = 50 - 2t^2 + R^2$,

整理得 $2R = \frac{50}{t} - t$, 因为 $y = \frac{50}{t} - t$ 在区间 $[3, 4]$ 上单调递减,

所以 $\frac{17}{2} \leq \frac{50}{t} - t \leq \frac{41}{3}$, 即 $\frac{17}{2} \leq 2R \leq \frac{41}{3}$, $R \in \left[\frac{17}{4}, \frac{41}{6}\right]$.

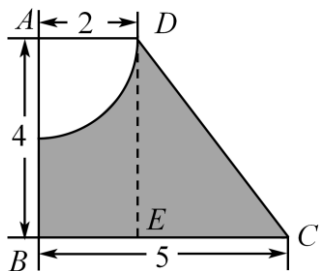
故答案为: $\left[\frac{17}{4}, \frac{41}{6}\right]$.

17. $S_{\text{表}} = 68\pi$, $\frac{140}{3}\pi$.

【分析】首先得到的旋转体是圆台挖去一个半球, 利用圆台和球的表面积和体积公式即可.

【详解】由题意知, 所求旋转体的表面积由圆台下底面、侧面和一半球面组成.

在直角梯形 $ABCD$ 中, 过 D 点作 $DE \perp BC$, 垂足为 E ,



在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中, $CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = 5$,

所以 $S_{\text{半球}} = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 2^2 = 8\pi$, $S_{\text{圆台侧}} = \frac{1}{2} \times 5 \times (2\pi \times 2 + 2\pi \times 5) = 35\pi$, $S_{\text{圆台下底}} = 25\pi$,

$\square S_{\text{表}} = 8\pi + 35\pi + 25\pi = 68\pi$.

因为圆台的体积 $V = \frac{1}{3} \left(\pi \times 2^2 + \sqrt{(\pi \times 2^2)(\pi \times 5^2)} + \pi \times 5^2 \right) \times 4 = 52\pi$,

半球的体积 $V_1 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$, 所以所求几何体的体积为 $V - V_1 = \frac{140}{3}\pi$.

18. (1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】(1) 连接 BC_1 , 设 BC_1 与 B_1C 的交点为 E , 连接 DE , 即可得到 $DE \parallel AC_1$, 从而得证;

(2) 由直棱柱的性质得到 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ，从而得到 $CC_1 \perp AC$ ，再由 $AC \perp BC$ ，得到 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，从而得到 $A_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，即可得到 $A_1C_1 \perp B_1C$ ，再由正方形对角线互相垂直得到 $BC_1 \perp B_1C$ ，即可得到 $B_1C \perp$ 平面 A_1C_1B ，即可得证.

【详解】(1) 连接 BC_1 ，设 BC_1 与 B_1C 的交点为 E ，连接 DE .

$\because$ 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ， $CC_1 = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 BCC_1B_1 为正方形，

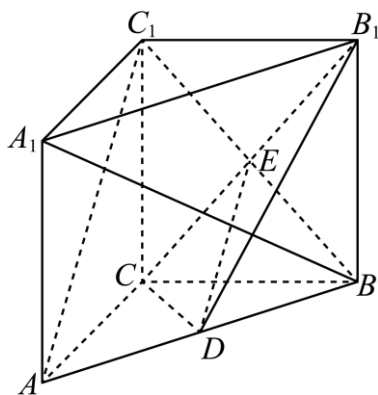
$\therefore E$ 为 BC_1 中点，

$\because D$ 是 AB 的中点，

$\therefore DE \parallel AC_1$.

$\because DE \subset$ 平面 B_1CD ， $AC_1 \not\subset$ 平面 B_1CD ，

$\therefore AC_1 \parallel$ 平面 B_1CD .



(2) 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC \subset$ 平面 ABC ，

所以 $CC_1 \perp AC$ ，

又 $AC \perp BC$ ， $BC \cap CC_1 = C$ ， $BC, CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，

所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，又 $AC \parallel A_1C_1$ ，所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

又 $B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $A_1C_1 \perp B_1C$ ，

又四边形 BCC_1B_1 为正方形, 所以 $BC_1 \perp B_1C$,

又 $A_1C_1 \cap BC_1 = C_1$, $A_1C_1, BC_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以 $B_1C \perp$ 平面 A_1C_1B ,

$A_1B \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以 $A_1B \perp B_1C$.

19. (1)证明见解析

(2) $\sqrt{2}$

【分析】(1) 利用线面垂直的判定定理证明即可;

(2) 利用三棱锥的体积关系, 求解点 P 到平面 BCM 的距离即可.

【详解】(1) 因为 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$.

又因为 $AC \perp PB, PB \cap BD = B$, $PB, BD \subset$ 平面 PBD

所以 $AC \perp$ 平面 PBD .

因为 $PD \subset$ 平面 PBD , 所以 $PD \perp AC$.

又由已知 $PD \perp DC, AC \cap DC = C$, $AC, DC \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $PD \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 因为 M 为 PD 的中点,

所以点 P 到平面 MCB 的距离等于点 D 到平面 MCB 的距离.

由 (1) 知, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot PD = 2\sqrt{6}$.

又因为 $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $BD = 2$, 所以 $PD = 2\sqrt{6}$, 则 $MD = \frac{1}{2}PD = \sqrt{6}$.

设点 D 到平面 BCM 的距离为 d , 所以 $V_{M-BCD} = V_{D-BCM}$.

因为 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 所以 $V_{M-BCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot MD = \sqrt{2}$.

在 $\triangle MCB$ 中, $MB = \sqrt{MD^2 + BD^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 2^2} = \sqrt{10}$,

$MC = \sqrt{MD^2 + DC^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 2^2} = \sqrt{10}$, $BC = 2$,

所以 $\cos \angle BMC = \frac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2MB \cdot MC} = \frac{10 + 10 - 4}{20} = \frac{4}{5}$, 又 $\angle BMC \in (0, \pi)$, 所以

$$\sin \angle BMC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BMC} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle MCB} = \frac{1}{2} MC \cdot MB \cdot \sin \angle BMC = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \frac{3}{5} = 3, \text{ 所以 } V_{D-MCB} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle MCB} \cdot d = \sqrt{2},$$

$$\text{所以 } d = \sqrt{2}.$$

20. (1)证明见解析

$$(2) \frac{\pi}{3}$$

【分析】(1) 根据平行四边形性质和三角形中位线性质，结合线面平行的判定可得 $AE \parallel$ 平面 DCP ， $EF \parallel$ 平面 DCP ，由面面平行的判定可证得结论；

(2) 根据面面垂直的性质可证得 $AB \perp$ 平面 PBC ，由线面角定义可知 $\angle APB = 45^\circ$ ，根据二面角平面角的定义可知所求二面角的平面角为 $\angle PBC$ ，由长度关系可得结果.

【详解】(1) $\because E$ 为 BC 中点， $BC = 2AB = 2AD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\therefore AD \parallel CE$ ， $AD = CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形， $\therefore AE \parallel CD$ ，

$\because AE \not\subset$ 平面 DCP ， $CD \subset$ 平面 DCP ， $\therefore AE \parallel$ 平面 DCP ；

$\because E, F$ 分别为 BC, BP 中点， $\therefore EF \parallel CP$ ，

$\because EF \not\subset$ 平面 DCP ， $CP \subset$ 平面 DCP ， $\therefore EF \parallel$ 平面 DCP ；

$\because AE \cap EF = E$ ， $AE, EF \subset$ 平面 AEF ， $\therefore$ 平面 $AEF \parallel$ 平面 DCP .

(2) $\because$ 平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$ ，平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \subset$ 平面 $ABCD$ ， $AB \perp BC$ ，

$\therefore AB \perp$ 平面 PBC ， $\therefore \angle APB$ 即为直线 AP 与平面 PBC 所成角，即 $\angle APB = 45^\circ$ ；

设 $AB = AD = 1$ ，则 $BC = 2$ ，

$\because AB \perp$ 平面 PBC ， $PB \subset$ 平面 PBC ， $\therefore AB \perp PB$ ， $\therefore PB = AB = 1$ ；

$\because BC \perp AB$ ， $PB \perp AB$ ， $BC \subset$ 平面 ABC ， $PB \subset$ 平面 PAB ，平面 $ABC \cap$ 平面 $PAB = AB$ ，

$\therefore \angle PBC$ 即为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，

$$\because CP \perp PB, \therefore \cos \angle PBC = \frac{PB}{BC} = \frac{1}{2}, \therefore \angle PBC = \frac{\pi}{3},$$

即二面角 $P-AB-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

21. (1)证明见解析

(2) $\frac{8\pi}{3}$

【分析】(1) 设 AB 与 CD 交于点 O ，利用线面垂直、面面垂直的判定定理可得答案；

(2) 过 E 作 $EF \perp PO$ 于 F ，由面面垂直的性质定理可得 $\angle ECF$ 为直线 CE 与平面 PCD 所成的角，由 $\tan \angle ECF = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 求出 CF 、 PO ，再求圆锥体积可得答案.

【详解】(1) 设 AB 与 CD 交于点 O ，连接 PO ，

因为 AB ， CD 为底面圆两条互相垂直的直径，所以 O 为底面圆的圆心，

所以 PO 为圆锥的高，所以 $PO \perp$ 底面圆，

因为 $CD \subset$ 底面圆，所以 $PO \perp CD$ ，

又 $AB \perp CD$ ， $AB \cap PO = O$ ， AB 、 $PO \subset$ 平面 PAB ，

所以 $CD \perp$ 平面 PAB ，

因为 $CD \subset$ 平面 PCD ，所以平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ；

(2) 过 E 作 $EF \perp PO$ 于 F ，连接 CF 。

由 (1) 知平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ，且平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = PO$ ，

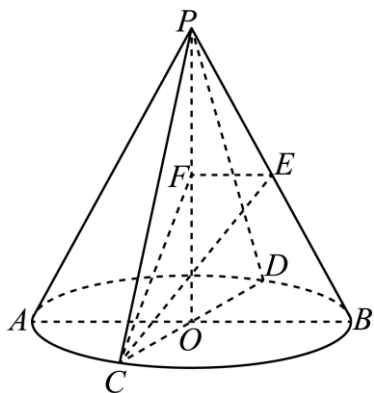
所以 $EF \perp$ 平面 PCD ，

所以 $\angle ECF$ 为直线 CE 与平面 PCD 所成的角，则 $\tan \angle ECF = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

因为 $AB = 4$ ，所以 $EF = \frac{1}{2}OB = 1$ ，所以 $\tan \angle ECF = \frac{EF}{CF} = \frac{1}{CF} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

则 $CF = \sqrt{5}$ ，所以 $PO = 2OF = 2\sqrt{5-2^2} = 2$ ，

故该圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2 = \frac{8\pi}{3}$ 。



(2)存在, Q 为线段 $P'D$ 的中点, 理由见解析.

(2) 连接 $AC \cap BD = O$, 取 $P'D, P'T$ 的中点 Q, N , 利用线面平行的判定、面面平行的判定性质推理作答.

正方形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $P'A \cap AD = A$, $P'A, AD \subset$ 平面 $P'AD$, 于是 $AB \perp$ 平面 $P'AD$, 而 $CD \parallel AB$,

(2) 点 Q 为线段 $P'D$ 的中点, $CQ \parallel$ 平面 BDT ,

依题意, T 为 $P'A$ 上一点, 且满足 $PT=2AT$, 则 T 为 NA 中点, 又 O 为 AC 中点, 即有 $OT \parallel CN$,

而 $TO \subset \text{平面 } BDT$, $CN \not\subset \text{平面 } BDT$, 因此 $CN \parallel \text{平面 } BDT$, 又 $CN \cap NQ = N, CN, NQ \subset \text{平面 } CQN$,

所以点 Q 为线段 $P'D$ 的中点时, $CQ \parallel$ 平面 BDT .