35 号专题系列之

函数与导数

目录

函数 9
指数 9
对数 10
幂函数 11
分式函数 12
对勾函数 14
基本初等函数 16
指、对函数 17
六大金刚 18
周期性与对称性 22
奇偶性 32
凹凸性 36
导数 40
切线模型 41
导数大题 43
1.单调性（分类讨论思想） 43
2.参数分离（数形结合） 44
3.不等式放缩 54
4.构造函数 58
5.隐零点问题（卡根思想） 63
6.极值点减元问题（减元思想） 65
7.极值点偏移问题（构造对称函数，利用对数均值不等式） 74
8.先构造，再赋值，正面和（积）式不等式（构造与赋值思想） 84
9.含有$\boldsymbol{lnx}$与$\boldsymbol{ex}$的证明问题（拆分思想） 92
10.可使用洛必达法则（极限思想） 94
11.必要性探路，充分性证明（端点效应） 101
12.泰勒公式 116

函数

指数

1．n 次方根

定义	一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$			
性质	n 是奇数	$a>0$	$x>0$	x 仅有一个值，记为 $\sqrt[n]{a}$
		$a<0$	$x<0$	
	n 是偶数	$a>0$	x 有两个值，且互为相反数，记为 $\pm\sqrt[n]{a}$	
		$a<0$	x 不存在	

0 的任何次方根都是 0.

2．根式

(1)定义：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数．

(2)性质：($n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$)

①$(\sqrt[n]{a})^n=a$．

②$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a，n为奇数，\\|a|，n为偶数.\end{cases}$

3．分数指数幂的意义

分数指数幂	正分数指数幂	规定：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0，m，n\in\mathbf{N}^*，且\ n>1)$
	负分数指数幂	规定：$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0，m，n\in\mathbf{N}^*，且\ n>1)$
	0 的分数指数幂	0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义

4.有理数指数幂的运算性质

(1)$a^ra^s=a^{r+s}(a>0，r，s\in\mathbf{Q})$.

(2)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0，r，s\in\mathbf{Q})$.

(3)$(ab)^r=a^rb^r(a>0，b>0，r\in\mathbf{Q})$.

5．无理数指数幂

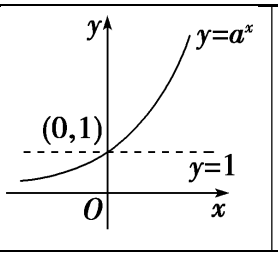
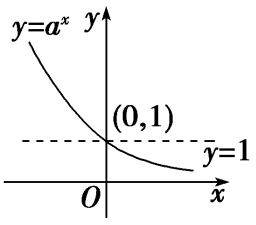
一般地，无理数指数幂 $a^\alpha(a>0，\alpha$ 是无理数)是一个确定的实数．有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂．

1．指数函数的定义

一般地，函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$叫做指数函数，其中 x 是自变量．

2．指数函数的图象和性质

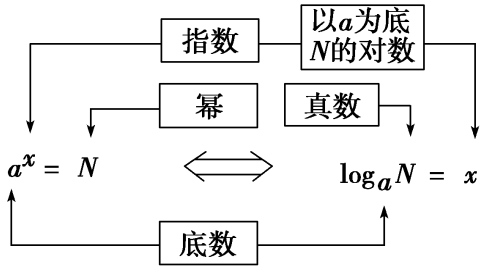
a 的范围	$a>1$	$0<a<1$

图象			
性质	定义域	R	
	值域	(0，＋∞)	
	过定点	过定点(0，1)	
	单调性	在 R 上是增函数	在 R 上是减函数
	奇偶性	非奇非偶函数	

对数

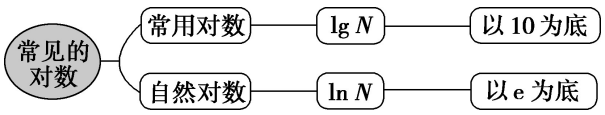
1．对数

(1)指数式与对数式的互化及有关概念.



(2)对数的底数 a 的取值范围是 $a>0$ 且 $a\neq1$.

2．常用对数与自然对数



3．对数的基本性质

(1)负数和零没有对数；

(2)$\log_a1=0$($a>0$，且 $a\neq1$)；

(3)$\log_aa=1$($a>0$，且 $a\neq1$).

1．对数的运算性质

如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$ 那么：

(1)$\log_a(M\cdot N)=\log_aM+\log_aN$，

(2)$\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$，

(3)$\log_aM^n=n\log_aM(n\in\mathbf{R})$.

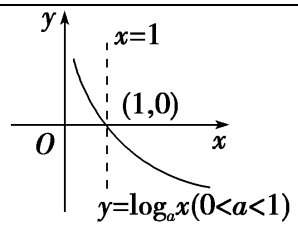
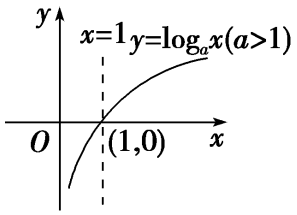
2．换底公式

$\log_ab=\frac{\log_cb}{\log_ca}$($a>0$，且 $a\neq1$；$c>0$，且 $c\neq1$；$b>0$).

1．对数函数的定义

一般地，我们把函数 $y=\log_ax$($a>0$，且 $a\neq1$)叫做对数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是(0，＋∞).

2．对数函数的图象及性质

a 的范围		$0<a<1$	$a>1$
图象			
性质	定义域	$(0，+\infty)$	
	值域	**R**	
	定点	$(1，0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	单调性	在$(0，+\infty)$上是减函数	在$(0，+\infty)$上是增函数

3.反函数

指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$和对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$互为反函数．

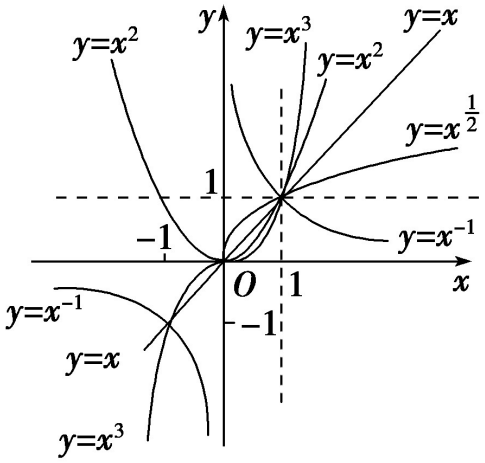
幂函数

1．幂函数的概念

函数 $y=x^\alpha$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数．

2．幂函数的图象与性质

(1)五种常见幂函数的图象



(2)五类幂函数的性质

幂函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	**R**	**R**	**R**	$[0，+\infty)$	$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$
值域	**R**	$[0，+\infty)$	**R**	$[0，+\infty)$	$\{y\|y\in$**R** 且 $y\neq0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	$x\in[0，+\infty)$，增 $x\in(-\infty，0]$，减	增	增	$x\in(0，+\infty)$，减 $x\in(-\infty，0)$，减
公共点	都经过点$(1，1)$				

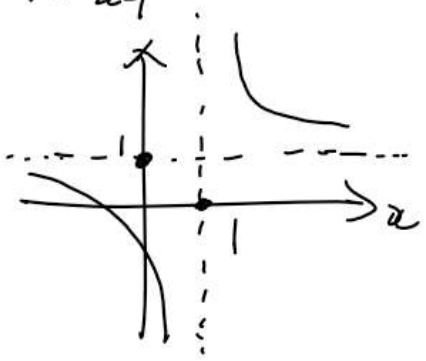
分式函数

分式函数：$y=\frac{ax+b}{cx+d}$（$\frac{-次}{一次}$）

$y=\frac{x+1}{x-1}$

通法：$y=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

即 $\frac{2}{x}$ 右平移1，上平移1



ps：即是一个反比例函数通过上下，左右平移得到

快速画图法：（三遮法）

$y=\frac{x+1}{x-1}$

① 遮分子，看分母，分母≠0（x渐）

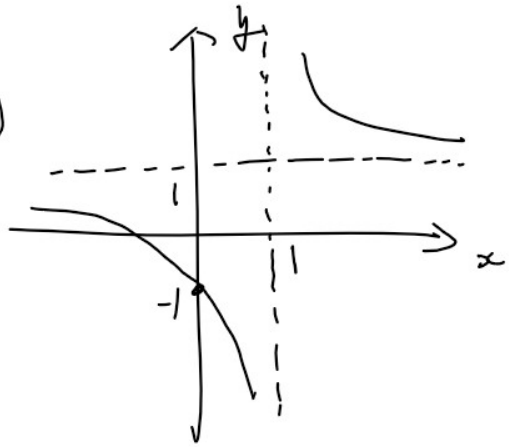
$y=\frac{\blacksquare}{x-1}$，$x-1\neq0$，$x\neq1$

② 遮右边看左边，（y渐）

$y=\frac{x\blacksquare}{x\blacksquare}$，$y=\frac{x}{x}=1$

③ 遮左边，看右边（令x=0，求y，即过某点/与y轴交点）

$y=\frac{\blacksquare+1}{\blacksquare-1}$，$y=\frac{1}{-1}=-1$，即过“一、三象限”



$y=\frac{ax+b}{cx+d}$

① 遮子，看母，母$\neq 0$

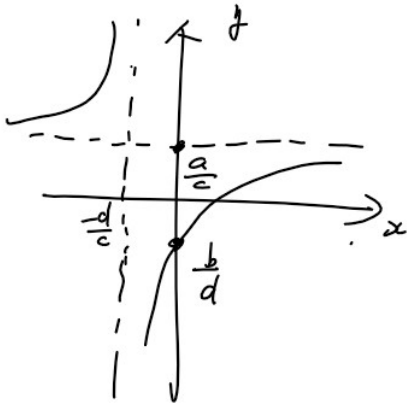
$cx+d\neq 0$，$x\neq \frac{-d}{c}$

② 遮右看左

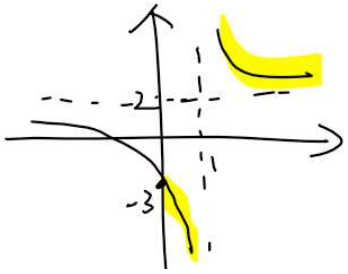
$y=\frac{ax}{cx}=\frac{a}{c}$

③ 遮左，看右

$y=\frac{b}{d}$



eg1：$y=\frac{2x+3}{x-1}$ $(x\geq 0)$ 求值域



$(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$

eg2：$y=\frac{2x^2+3}{x^2-1}$ 求值域

令$x^2=t>0$

$y=\frac{2t+3}{t-1}$

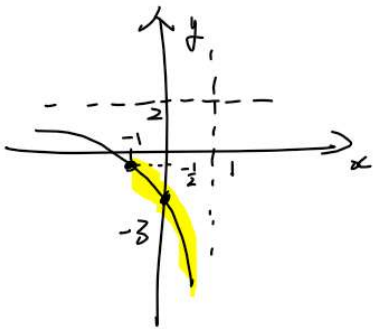
eg3：$y=\frac{2\sin x+3}{\sin x-1}$，求值域

令$\sin x=t$，$t\in[-1,1]$

$y=\frac{2t+3}{t-1}$

$t=-1$，$y=\frac{-2+3}{-1-1}=\frac{1}{-2}$

$y\in[-\infty,-\frac{1}{2}]$



eg4: $y=\dfrac{2\sqrt{k^2+1}+3}{\sqrt{k^2+1}-1}$ 求值域

令 $\sqrt{k^2+1}=t\geq 1$

$y=\dfrac{2t+3}{t-1}\in(2,+\infty)$

eg5: $y=\dfrac{2\sin^2x+3}{-\cos^2x}$，求值域

$y=\dfrac{2\sin^2x+3}{-(1-\sin^2x)}=\dfrac{2\sin^2x+3}{\sin^2x-1}$

令 $\sin^2x=t\in[0,1]$

$y=\dfrac{2t^2+3}{t^2-1}\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$

对勾函数

对勾函数 $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{ex+f}$ $\left(\dfrac{二次}{一次}\right)$

双勾：

$y=x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+1}{x}$ $\left(\dfrac{二次}{一次}\right)$

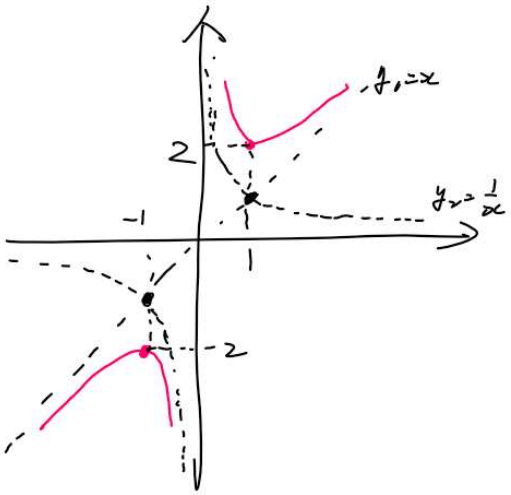
① $y_1=x$，$y_2=\frac{1}{x}$（左右护法，渐近线）

$y=y_1+y_2$：图像叠加

② 特殊点 $y_1=y_2$

$x=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\pm1$

③ y_1，y_2交点注上翻2倍+护法



双撇：

$y=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$（三次/一次）

① $y_1=x$ $y_2=-\frac{1}{x}$（上下护法，渐近线）

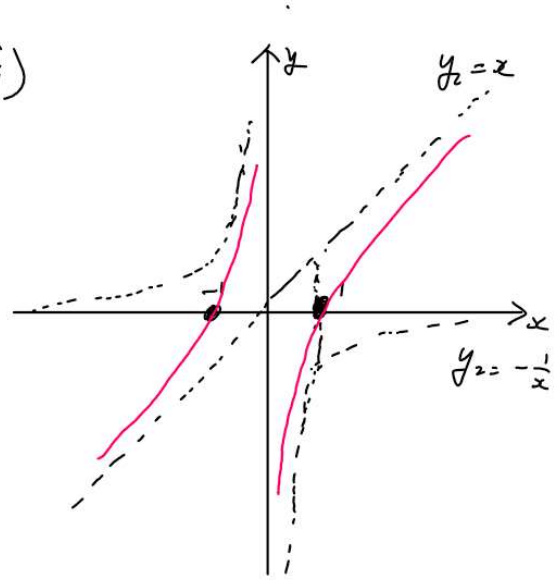
$y=y_1+y_2$，图像叠加，

正部与负部抓满小部分

② 特殊点 $|y_1|=|y_2|$

$|x|=|-\frac{1}{x}| \Rightarrow x=\pm 1$

③ 双撇穿过特殊点 + 上下护法



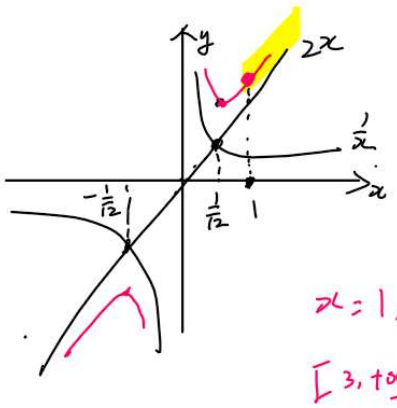
$y=ax+\frac{b}{x}$ $a.b$ 同号双勾 / 异号双撇

① $y_1=ax$ 与 $y_2=\frac{b}{x}$

② 相加

③ 特殊点 $|ax|=|\frac{b}{x}|$

eg1：$y=2x+\frac{1}{x}$ $(x>1)$ 求值域



$2x=\frac{1}{x}$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=1$，$y=2+1=3$

$[3,+\infty)$

eg2：$y=\frac{2x^2+x+1}{x}=2x+\frac{1}{x}+1$

eg3: $y=\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$

令 $x-1=t$，$x=t+1$

$y=\dfrac{2(t+1)^2+(t+1)+1}{t}=\dfrac{2t^2+3t+4}{t}$

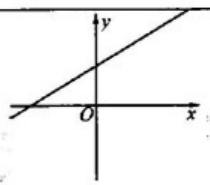
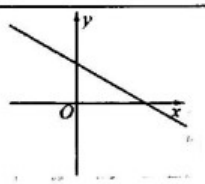
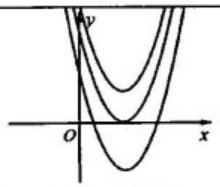
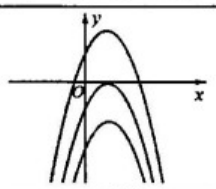
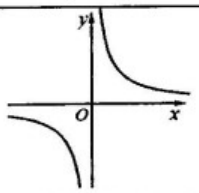
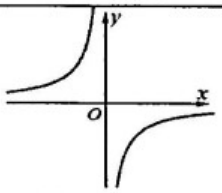
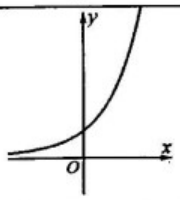
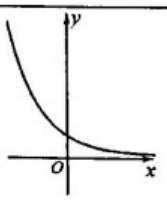
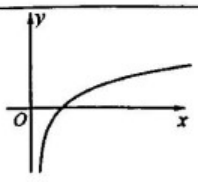
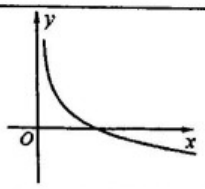
$=2t+\dfrac{4}{t}+3$

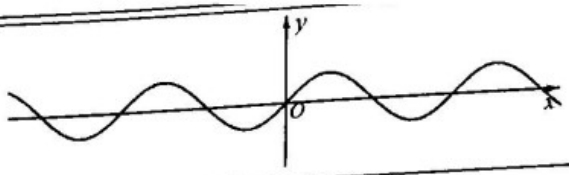
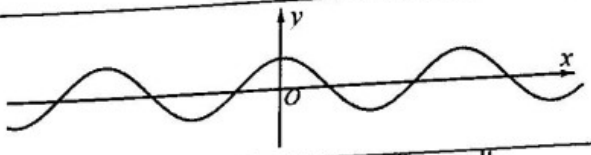
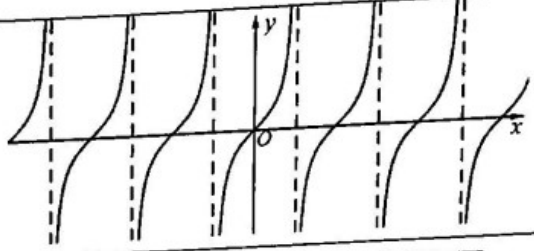
eg4: $y=\dfrac{x}{x^2+2x+3}$ $\left(\dfrac{一次}{二次}\right)$

$=\dfrac{1}{x+\frac{3}{x}+2}$ $(\div x)$

基本初等函数

基本初等函数有 5 类，指、对、幂、三角、反三角、其中反三角早已删除

函数解析式	图象	
$y=kx+b(k\neq 0)$ 当 $k>0$ 时，递增 当 $k<0$ 时，递减		
$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 当 $a>0$ 时，开口向上 当 $a<0$ 时，开口向下		
$y=\dfrac{k}{x}$ 当 $k>0$ 时，有两个递减区间 当 $k<0$ 时，有两个递增区间		
$y=a^x$ 当 $a>1$ 时，递增 当 $0<a<1$ 时，递减 过定点 $(0,1)$		
$y=\log_a x$ 当 $a>1$ 时，递增 当 $0<a<1$ 时，递减 过定点 $(1,0)$		

$y=\sin x$ 奇函数，$T=2\pi$ 定义域和值域均为 R	
$y=\cos x$ 偶函数，$T=2\pi$ 定义域和值域均为 R	
$y=\tan x$ 奇函数，$T=\pi$ 定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$ 值域为 R	

不要小瞧上述 8 个函数，当你对它们理解深到一定程度时，基本初等函数章节就通了

重点是二次函数（只要是与二次函数有关的问题，三步走图象解决，不要配方，因为配方然并卵）

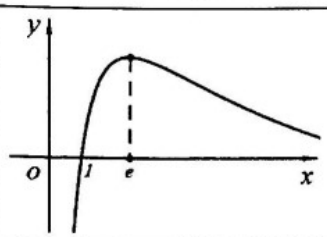
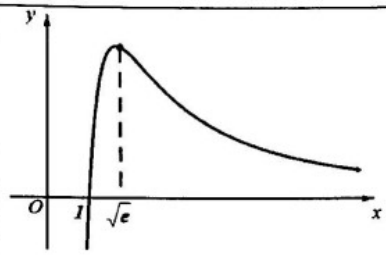
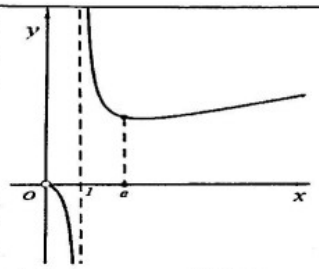
第一步：算出对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$；

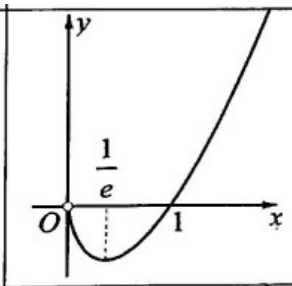
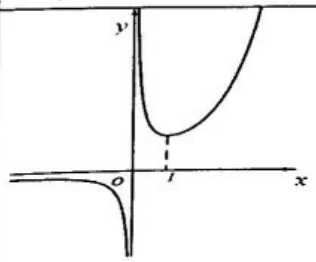
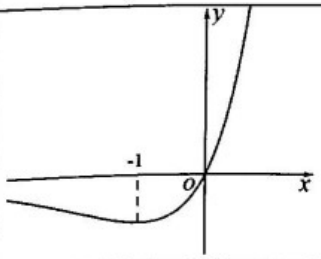
第二步：根据开口方向结合 $f(0)$ 的值，画出草图；

第三步：标出定义域，在定义域内的图象加粗，注意端点值的开闭.

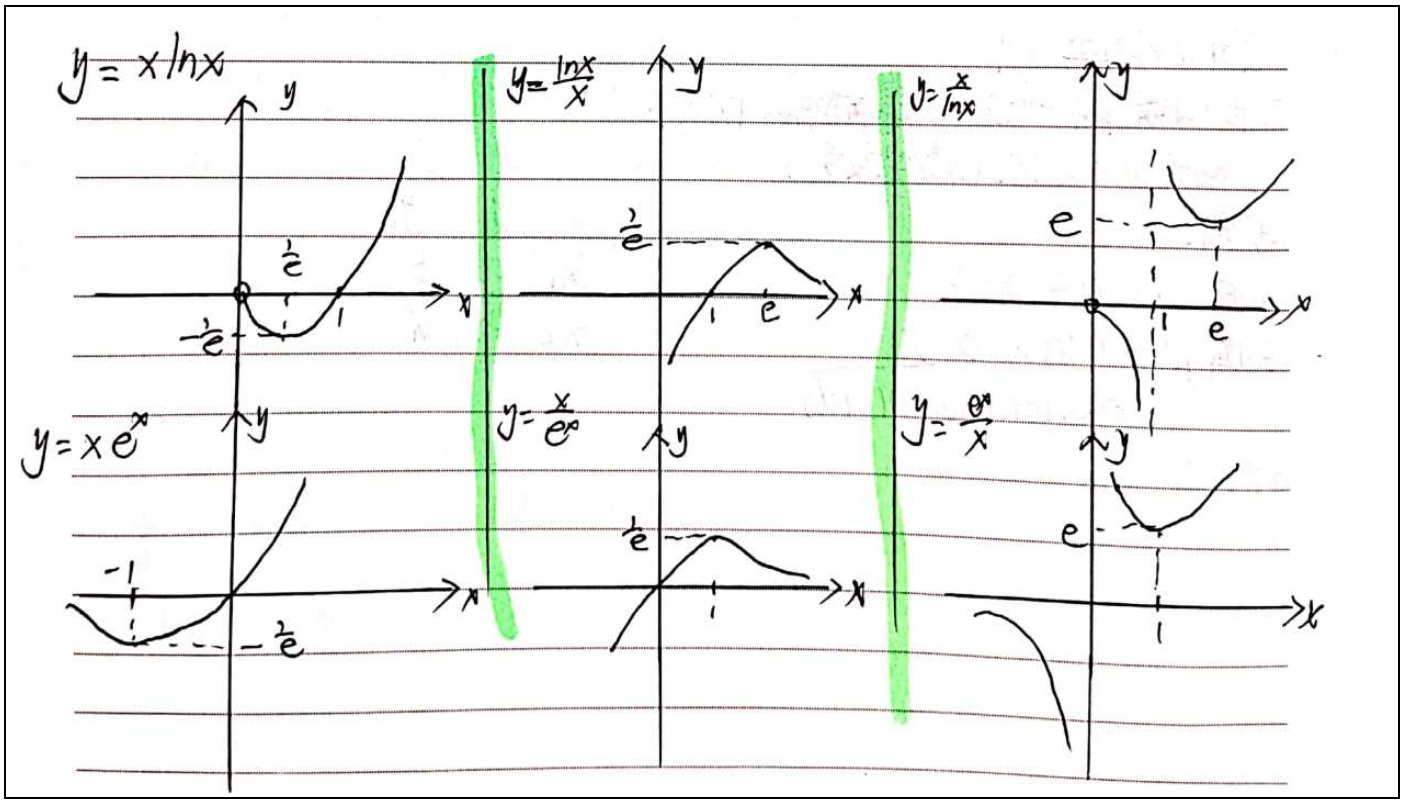
指、对函数

类型五、含指对数可求导函数

函数解析式	图象	性质
$f(x)=\frac{\ln x}{x}$		憔悴客称之为“e 峰图” 零点为 $x=1$，值域为 $(-\infty,\frac{1}{e}]$， 增区间为 $(0,e)$，减区间为 $(e,+\infty)$ 可用来研究 A^B 与 B^A 的大小
$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$		憔悴客称之为为“$\sqrt{e}$ 峰图” 零点为 $x=1$，值域为 $(-\infty,\frac{1}{2e}]$， 增区间为 $(0,\sqrt{e})$，减区间为 $(\sqrt{e},+\infty)$ 可用来研究 A^{B^2} 与 B^{A^2} 的大小
$f(x)=\frac{x}{\ln x}$		憔悴客称之为“e 谷图” 定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 值域为 $(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$ 增区间为 $(e,+\infty)$，减区间为 $(0,1)$，$(1,e)$

$f(x)=x\ln x$		憔悴客称之为“甩勾图” 零点为 $x=1$，值域为 $[-\frac{1}{e},+\infty)$ 增区间为 $(\frac{1}{e},+\infty)$，减区间为 $(0,\frac{1}{e})$
$f(x)=\frac{e^x}{x}$		定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 值域为 $(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$ 增区间为 $(1,+\infty)$ 减区间为 $(-\infty,0)$，$(0,1)$
$f(x)=xe^x$		值域为 $[-\frac{1}{e},+\infty)$ 增区间为 $(-1,+\infty)$ 减区间为 $(-\infty,-1)$

六大金刚

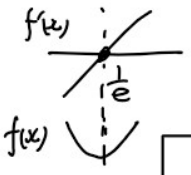


① $f(x)=x\ln x \quad (x>0)$

令 $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1=0$，

$\ln x=-1=\ln e^{-1}$

$x=\frac{1}{e}$



当 $x\in(0,\frac{1}{e})$，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

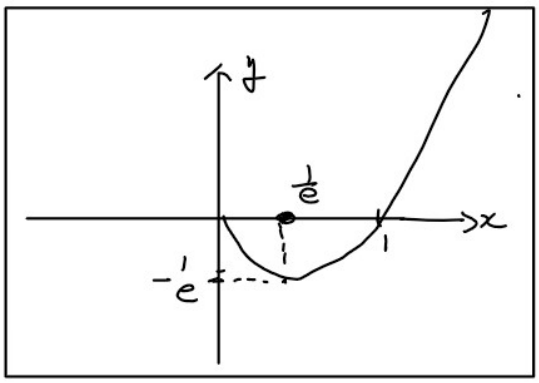
当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ $f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$x\to 0$，$x\to 0$，$f(x)\to 0$

$x=\frac{1}{e}$，$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$

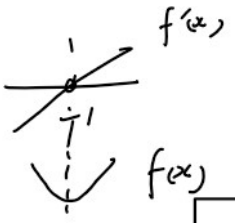
$x\to+\infty$，$x\to+\infty$，$\ln x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$

$x=1$，$f(1)=1\times\ln 1=0$



② $f(x)=x\cdot e^x \quad (x\in R)$

令 $f'(x)=e^x(x+1)=0$，$x=-1$



当 $x\in(-\infty,-1)$ $f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

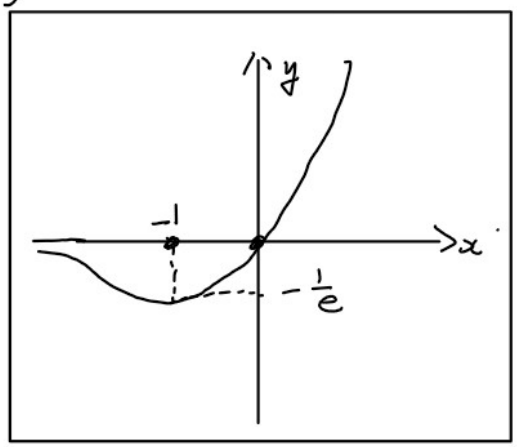
当 $x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$x=0$，$f(0)=0$，$x=-1$，$f(-1)=-\frac{1}{e}$

$x\to-\infty$，$x\to-\infty$，$e^x\to 0$，$f(x)\to 0$

（指数更厉害）

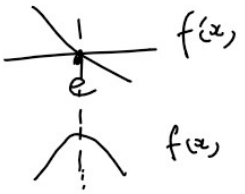
$x\to+\infty$，$x\to+\infty$，$e^x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$



③ $f(x)=\frac{\ln x}{x}\ (x>0)$

令 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，即 $1-\ln x=0$

$x=e$



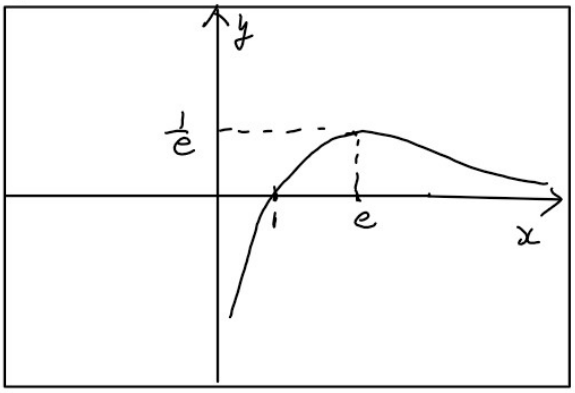
当 $x\in(0,e)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ ↗

当 $x\in(e,+\infty)$ $f'(x)<0$，$f(x)$ ↘

$x=1$，$f(1)=0$；$x=e$，$f(x)_{max}=f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$

$x\to 0$，$f(x)=\frac{\ln x\to-\infty}{x\searrow 0}\Rightarrow-\infty$

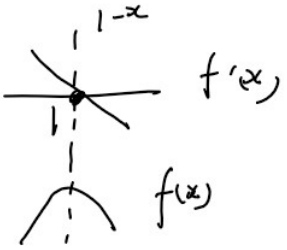
$x\to+\infty$，$f(x)=\frac{\ln x\to+\infty}{x\to+\infty}\Rightarrow 0$（$x$ 比 $\ln x$ 厉害）



④ $f(x)=\frac{x}{e^x}\ (x\in R)$

令 $f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}=0$

$x=1$



当 $x\in(-\infty,1)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ ↗

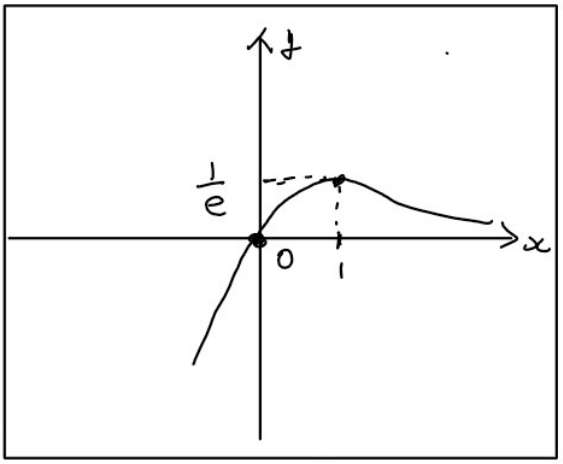
当 $x\in(1,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ ↘

$x=0$，$f(0)=0$；

$x=1$，$f(x)_{max}=f(1)=\frac{1}{e}$

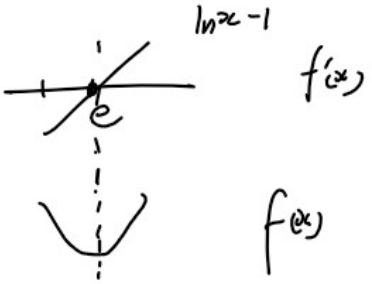
$x\to-\infty$，$f(x)=\frac{x\to-\infty}{e^x\searrow 0}\Rightarrow-\infty$

$x\to+\infty$，$f(x)=\frac{x\to+\infty}{e^x\to+\infty}\Rightarrow 0$（$e^x$ 比 x 厉害）



⑤ $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ ($x>0$ 且 $x\neq 1$)

令 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0$, $x=e$



$\ln x\neq 0$, $x\neq 1$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

当 $x\in(0,1)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ ↓

当 $x\in(1,e)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ ↓

当 $x\in(e,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$ ↑

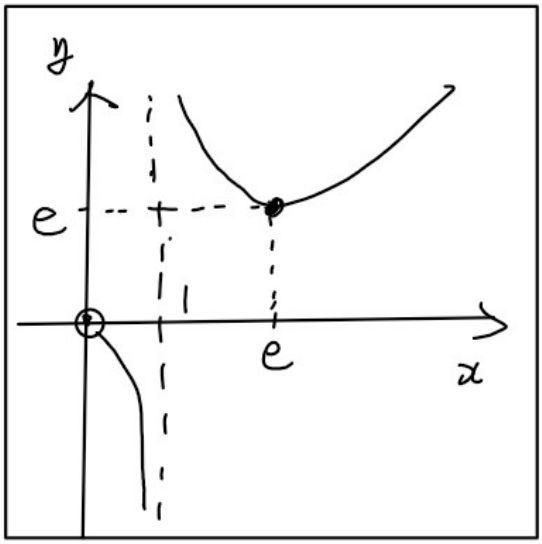
$x=e$, $f(x)_{min}=f(e)=e$

$x\to 0$, $f(x)=\frac{x\to 0}{\ln x\to -\infty}\Rightarrow 0$

$x\to 1^-$, $f(x)=\frac{x\to 1}{\ln x\to 0^-}\Rightarrow -\infty$

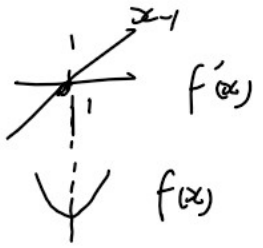
$x\to 1^+$, $f(x)=\frac{x\to 1}{\ln x\to 0^+}\Rightarrow +\infty$

$x\to+\infty$, $f(x)=\frac{x\to+\infty}{\ln x\to+\infty}\Rightarrow +\infty$ (x 厉害)



⑥ $f(x)=\frac{e^x}{x}\quad(x\neq 0)$

令 $f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0$，$x=1$



当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

当 $x\in(0,1)$，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

当 $x\in(1,+\infty)$ $f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

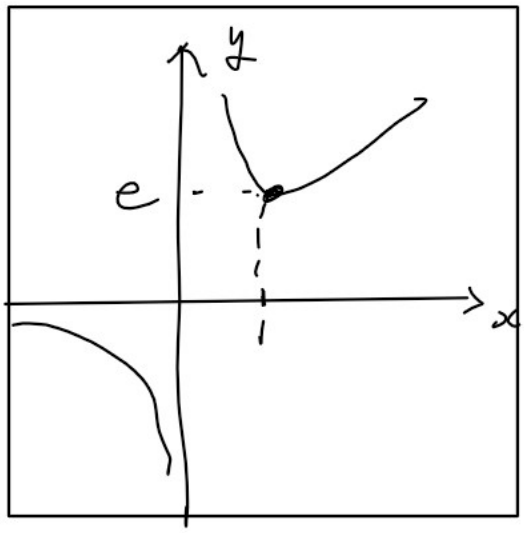
$x=1$，$f(1)=e$

$x\to-\infty$，$f(x)=\frac{e^x\to 0}{x\to-\infty}\Rightarrow 0^-$

$x\to 0^-$，$f(x)=\frac{e^x\to 1}{x\to 0^-}\Rightarrow-\infty$

$x\to 0^+$ $f(x)=\frac{e^x\to 1}{x\to 0^+}\Rightarrow+\infty$

$x\to+\infty$，$f(x)=\frac{e^x\to+\infty}{x\to+\infty}\Rightarrow+\infty$（$e^x$ 厉害）



周期性与对称性

周期性：同号周期：括号里面的 x 均为正号

① $f(x+a)=f(x)$ $T=a$

② $f(x+a)=f(x-a)$ $T=2a$

$|(x+a)-(x-a)|=2a$

③ $f(x+a)=f(x+b)$ $T=|a-b|$

$|(x+a)-(x+b)|=|a-b|$

括号里面相减，取正

④ $f(x+a)=-f(x)$ $T=2a$

⑤ $f(x+a)=-f(x+b)$ $T=2|a-b|$

} 有负号：2×|括号里相减|

⑥ $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$

⑦ $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$

} $\Rightarrow f(x+a)\cdot f(x)=C$，$T=2a$

⑧ $f(x+a)\cdot f(x+b)=C$，$T=2|a-b|$

} 2×|括号里相减|

⑨ $f(kx+a)=f(kx)$ $T=a$

系数 k 不影响 $f(x)$ 周期

令 $kx=t$

$f(t+a)=f(t) \Rightarrow f(x+a)=f(x)$，$T=a$

对称性：异号对称（括号里面 x 为异号）

{ 奇对称（点对称）：$f(x)+f(-x)=0$ 类比奇函数（奇型）

偶对称（轴对称）：$f(x)=f(-x)$ 类比偶函数（偶型）

① $f(x+a)=f(-x+a)$ 轴：$x=a$

$\frac{(x+a)+(-x+a)}{2}=a$，$\frac{括号和}{2}$ $\Leftrightarrow$ $f(x+a)$ 是偶函数

（可用平移来理解）

② $f(x+a)=f(-x+b)$，轴：$x=\frac{a+b}{2}$

$\frac{(x+a)+(-x+b)}{2}$，$\frac{括号和}{2}$

} 偶型

③ $f(x+a)+f(-x+a)=0$，点：$(a,0)$

$\frac{(x+a)+(-x+a)}{2}=a$，$\frac{0}{2}=0$ $\Leftrightarrow$ $f(x+a)$是奇函数

④ $f(x+a)+f(-x+b)=0$，点：$\left(\frac{a+b}{2},0\right)$

$\frac{(x+a)+(-x+b)}{2}=\frac{a+b}{2}$，$\frac{0}{2}=0$.

⑤ $f(x+a)+f(-x+a)=2b$，点：(a,b)

$\frac{(x+a)+(-x+a)}{2}=a$，$\frac{2b}{2}=b$ $\Leftrightarrow$ $f(x+a)-b$是奇函数

三个型

⑥ $f(kx+a)=f(-kx+a)$，$\Rightarrow f(x)$关于$x=a$对称，但$f(kx)$关于$x=\frac{a}{k}$对称

系数k不影响对称性，$\Rightarrow$即$f(kx+a)$是偶函数.

则$f(x)$关于$x=a$对称.

令$kx=t$

$f(t+a)=f(-t+a)$

即$f(x+a)=f(-x+a)$，轴：$x=a$

eg: $f(x)=(x-2)^2$关于$x=2$对称.

$f(x+2)=(x+2-2)^2=x^2$是偶函数

$f(2x+2)=(2x+2-2)^2=4x^2$是偶函数

$f(2x+2)$是偶函数，$f(2x)=(2x-2)^2=4(x-1)^2$

即$f(2x)$关于$x=1$对称.

⑦ 逆向思考. $f(x+a)$是偶函数$\Rightarrow f(x)$关于$x=a$对称.

eg1: $f(x+a)=x^2$，x^2是偶函数，求$f(x)$

(1) 令$x+a=t$，$x=t-a$

$f(t)=(t-a)^2$ $\Rightarrow f(x)=(x-a)^2$关于$x=a$对称

(2). $f(x+a)=x^2=g(x)$，$g(x)$是偶函数

则$g(x)=g(-x)$ 即 $f(x+a)=f(-x+a)$

$\Rightarrow f(x)$关于$x=a$对称.

⑧ 有系数

eg: $f(kx+a)=x^2$，是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称。

令 $kx+a=t$，$x=\frac{t-a}{k}$

$f(t)=\left(\frac{t-a}{k}\right)^2=\frac{1}{k^2}(t-a)^2$

即 $f(x)=\frac{1}{k^2}(x-a)^2$ 关于 $x=a$ 对称

1、 单个函数的对称（$y=f(x)$ 自己的对称问题）

结论：①$f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称（当 $a=0$ 时，恰好为偶函数）

②$f(a-x)=f(b+x)\Leftrightarrow f(x)$ 关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 轴对称

③$f(a-x)+f(a+x)=0\Leftrightarrow f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称（当 $a=0$ 时，恰好为奇函数）

④$f(a-x)+f(a+x)=2b\Leftrightarrow f(x)$ 关于点 (a,b) 对称

2、 两个函数的对称（$y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 两个不同函数的对称问题）

结论：①若 $f(a-x)=g(a+x)$，则 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称

②若 $f(a-x)=g(b+x)$，则 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称

③若 $f(a-x)+g(a+x)=0$，则 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于 $(a,0)$ 对称

④若 $f(a-x)+g(a+x)=2b$，则 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于 (a,b) 对称

若函数 $f(x)$ 是奇函数，则

①$y=f(x+m)$ 的图象关于 $(-m,0)$ 对称，满足 $f(x)+f(-2m-x)=0$

②$y=f(x)+m$ 的图象关于 $(0,m)$ 对称，满足 $f(x)+f(-x)=2m$

③$y=f(x+m)+n$ 的图象关于 $(-m,n)$ 对称，满足 $f(x)+f(-2m-x)=2n$

周期性与对称性的区分

若 $f(x+a)=\pm f(x+b)$，则 $f(x)$ 具有周期性

若 $f(a+x)=\pm f(b-x)$，则 $f(x)$ 具有对称性

记住："内同表示周期性，内反表示对称性"

奇偶性、周期性、对称性三者间的联系

（1）对称性+对称型⇒周期性

①函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$，$x=b$ 对称，则 $f(x)$ 的周期为 $|2b-2a|$

证明：$\begin{cases} f(x)=f(2a-x) \\ f(x)=f(2b-x) \end{cases} \Rightarrow f(2a-x)=f(2b-x) \Rightarrow T=|2b-2a|$

②函数 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$，$(b,0)$ 对称，则 $f(x)$ 的周期为 $|2b-2a|$

证明：$\begin{cases} f(x)=-f(2a-x) \\ f(x)=-f(2b-x) \end{cases} \Rightarrow f(2a-x)=f(2b-x) \Rightarrow T=|2b-2a|$

③函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$，点 $(b,0)$ 对称，则 $f(x)$ 的周期为 $|4b-4a|$

证明：$\begin{cases} f(x)=f(2a-x) \\ f(x)=-f(2b-x) \end{cases} \Rightarrow f(2a-x)=-f(2b-x) \Rightarrow T=|4b-4a|$

（2）奇偶性+对称性⇒周期性

①设函数 $f(x)$ 为奇函数且关于 $x=a$ 对称，则 $f(x)$ 是 $T=4a$ 的周期函数.

证明：$\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ f(-x)=f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow f(x+2a)=-f(x) \Rightarrow f(x+4a)=f(x) \Rightarrow T=4a$

②设函数 $f(x)$ 为奇函数且关于 $(a,0)$ 对称，则 $f(x)$ 是 $T=2a$ 的周期函数.

证明：$\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ f(-x)=-f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow f(x+2a)=f(x) \Rightarrow T=2a$

③设函数 $f(x)$ 为偶函数且关于 $x=a$ 对称，则 $f(x)$ 是 $T=2a$ 的周期函数.

证明：$\begin{cases} f(-x)=f(x) \\ f(-x)=f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow f(x+2a)=f(x) \Rightarrow T=2a$

④设函数 $f(x)$ 为偶函数且关于 $(a,0)$ 对称，则 $f(x)$ 是 $T=4a$ 的周期函数.

证明：$\begin{cases} f(-x)=f(x) \\ f(-x)=-f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow f(x+2a)=-f(x) \Rightarrow T=4a$

（3）奇偶性+周期性⇒对称性

①设函数 $f(x)$ 为奇函数且周期 $T=2a$，则 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称.

证明：$\begin{cases} f(x)=-f(-x) \\ f(x)=f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow f(x+2a)=-f(-x) \Rightarrow f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称

②设函数 $f(x)$ 为偶函数且周期 $T=2a$，则 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称.

证明：$\begin{cases} f(x)=f(-x) \\ f(x)=f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow f(x+2a)=f(-x) \Rightarrow f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称

（4）对称性+周期性⇒奇偶性

①设函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，且周期 $T=2a$，则 $f(x)$ 是偶函数.

证明：$\begin{cases} f(-x)=f(2a+x) \\ f(x)=f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x)$ 是偶函数

②设函数 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称，且周期 $T=2a$，则 $f(x)$ 是奇函数.

证明：$\begin{cases} -f(-x)=f(2a+x) \\ f(x)=f(2a+x) \end{cases} \Rightarrow -f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x)$ 是奇函数

练习：

9．下列说法正确的是 (CD)

A．函数 $y=f(x+1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称

B．若函数 $y=f(x+1)-2$ 为奇函数，则 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,-2)$ 中心对称

C．若 $f(3x+1)$ 为奇函数，则 $y=f(3x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{1}{3},0\right)$ 对称

D．若 $f(3x+1)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，则关于 a 的不等式 $f(a+2)>f(2a-1)$ 的解集为 $\left(\frac{1}{3},3\right)$

A. 奇号对称：$\frac{(x+1)+(1-x)}{2}$

B. $f(x+a)-b$ 是奇函数 $\Rightarrow (a,b)$

C. $f(kx+a)$ 奇 $\Rightarrow f(x)$ 点 $(a,0)$ 对称

$=f\left[k\left(x+\frac{a}{k}\right)\right] \Rightarrow f(kx)$ 点 $\left(\frac{a}{k},0\right)$ 对称

D. $f(3x+1)$ 偶 $\Rightarrow f(x)$ 关于 $x=1$ 对称

【分析】根据对称的定义可判断 A，由奇函数及中心对称的判定可判断 BC，利用偶函数及对称性的判定结合单调性解不等式判断 D.

【详解】令函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称图象上任意一点 $P(x,y)$，

则 P 点关于直线 $x=1$ 的对称点 $P'(2-x,y)$ 在函数 $y=f(x+1)$ 的图象上，所以

$y=f(2-x+1)=f(3-x)$，

即函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称图象对应的函数为 $y=f(3-x)$，故 A 错误；

函数 $y=f(x+1)-2$ 为奇函数，则 $f(-x+1)-2=-f(x+1)+2$，

即 $f(-x+1)+f(x+1)=4$ 恒成立，所以 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 中心对称，故 B 错误；

$f(3x+1)$ 为奇函数，则 $f(-3x+1)=-f(3x+1)$，即 $f(-3x+1)+f(3x+1)=0$，

所以 $f(-x+1)+f(x+1)=0$，即 $f(x)$ 图象关于 $(1,0)$ 成中心对称，所以 $f(3x)$ 关于 $(\frac{1}{3},0)$ 成中心对称，故 C 正确；

$f(3x+1)$ 为偶函数，则 $f(-3x+1)=f(3x+1)$，即 $f(-x+1)=f(x+1)$，

所以函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称，又 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，$f(a+2)>f(2a-1)$，

所以 $|a+2-1|>|2a-1-1|$，平方可得 $3a^2-10a+3<0$，解得 $\frac{1}{3}<a<3$，故 D 正确.

故选：CD

8. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)+f(-x)=2$，若 $y=x+1$ 与 $y=f(x)$ 的图像有交点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，则 $x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3=$（C）

A. -3　　B. 0　　C. 3　　D. 6

【分析】两个函数图像都关于点 $(0,1)$ 对称，则图像交点也关于点 $(0,1)$ 对称，可求值.

【详解】由 $f(x)+f(-x)=2$ 可得 $2-f(x)=f(-x)$，

函数 $f(x)$ 的图像上任意一点 $(x,f(x))$ 关于点 $(0,1)$ 的对称点为 $(-x,2-f(x))$，即点 $(-x,f(-x))$，由 $(-x,f(-x))$ 也满足函数解析式，可得函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(0,1)$ 对称，

函数 $y=x+1$ 的图像可以由奇函数 $y=x$ 的图像向上平移 1 个单位得到，所以函数 $y=x+1$ 的图像也关于点 $(0,1)$ 对称，

7.若函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)$ 对任意的 x 都 · 215 · 有 $f(\frac{\pi}{3}+x)=f(\frac{\pi}{3}-x)$，则 $f(\frac{\pi}{3})$ 等于（　）

A.3 或 0　　B.−3 或 0

C.0　　D.−3 或 3

$f(a+x)=f(a-x)$ 关于 a 对称

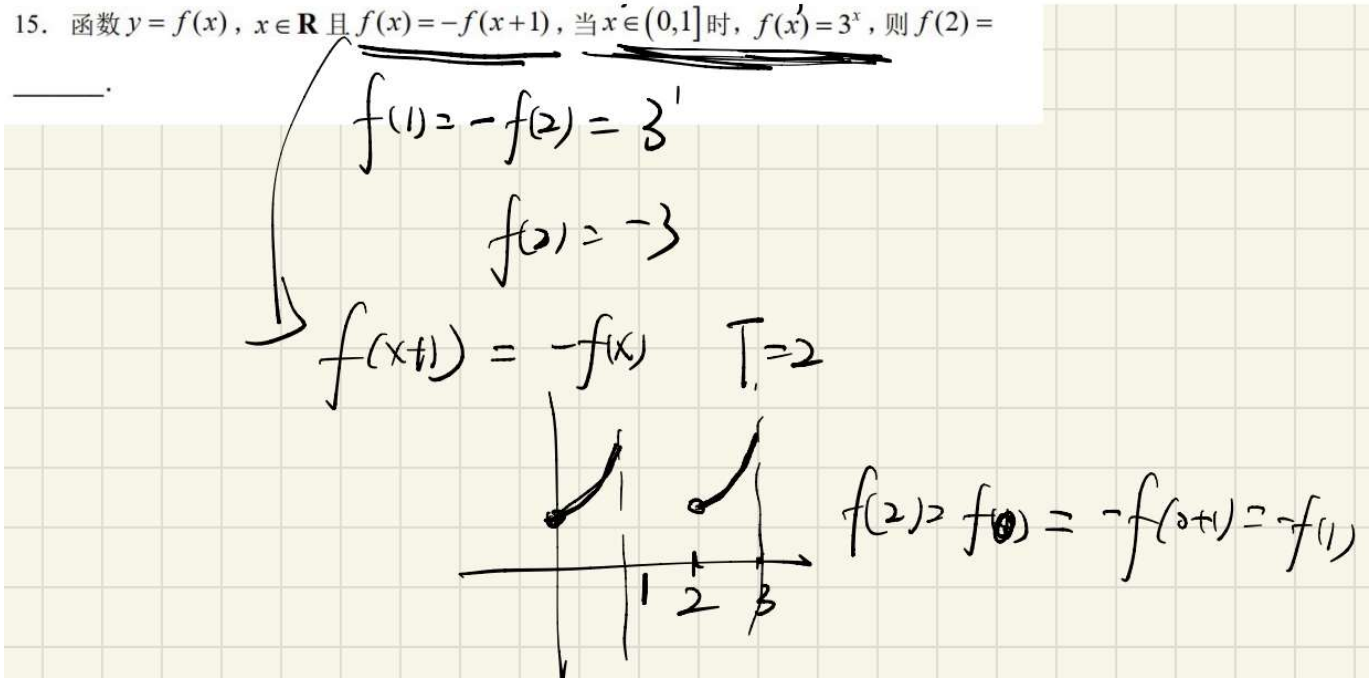
3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且满足 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x-2$，则 $f(6.5)=$_____.

3. -0.5. 解析 因为 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，所以 $f(x+4)=f((x+2)+2)=-\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，即函数 $f(x)$ 的周期为 4. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，即 $f(6.5)=f(2.5)=f(-1.5)=f(1.5)=-0.5$.

中山市第一中学 2025 届高一第一学期第二次段考

数学

15. 函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $f(x)=-f(x+1)$，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=3^x$，则 $f(2)=$_____.



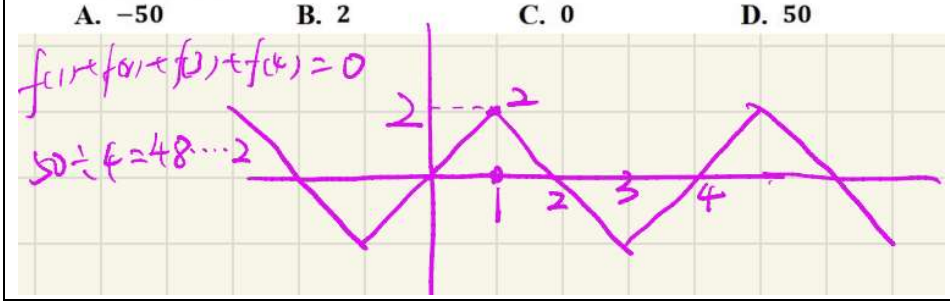
中山市第一中学 2022-2023 学年第一学期高一数学单元卷

（一）

第五章　三角函数

8. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$（　）

A. -50　　B. 2　　C. 0　　D. 50

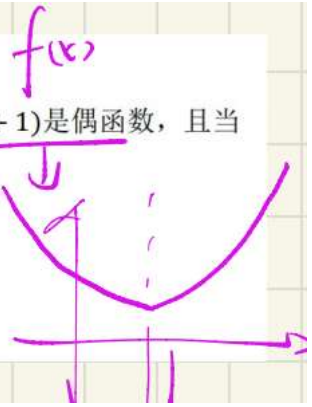


中山一中 2022-2023 学年第一学期高一年级数学晚练（16）

8. 已知$f(x)$是定义在实数集R上的函数，满足条件：$y=f(x+1)$是偶函数，且当$x\le 1$时，$f(x)=(\frac{1}{2})^x$，则$f(\frac{1}{2})$，$f(\frac{4}{3})$，$f(\frac{5}{3})$的大小关系是(　)

A. $f(\frac{4}{3})<f(\frac{5}{3})<f(\frac{1}{2})$　　B. $f(\frac{5}{3})<f(\frac{4}{3})<f(\frac{1}{2})$

C. $f(\frac{4}{3})<f(\frac{1}{2})<f(\frac{5}{3})$　　D. $f(\frac{1}{2})<f(\frac{4}{3})<f(\frac{5}{3})$

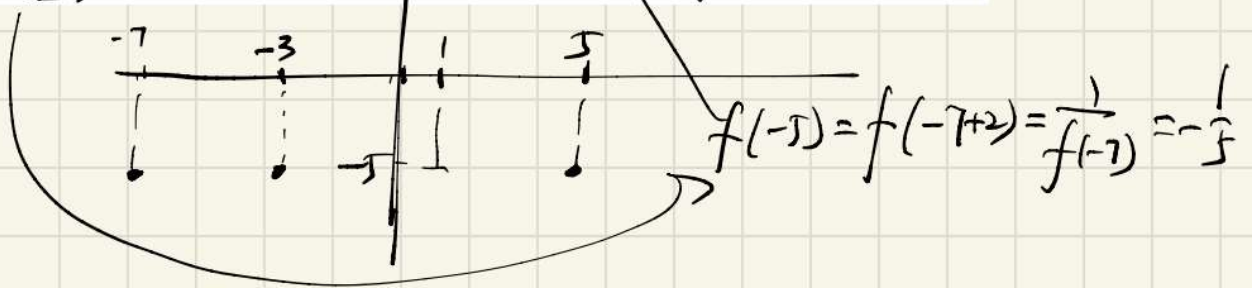


$f(x)\cdot f(x+a)=C \Leftarrow f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$　$T=2a$

7、函数$f(x)$对于任意实数x满足条件$f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若$f(1)=-5$，则

$f(f(5))=$_____。

$T=4$　$f(5)=-5$



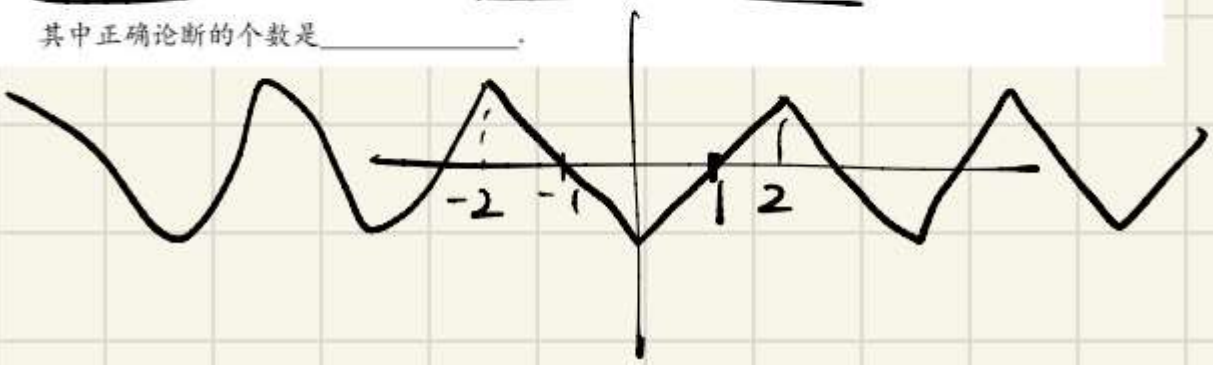
$f(-5)=f(-7+2)=\frac{1}{f(-7)}=-\frac{1}{5}$

7.若定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$，$f(x+1)$是奇函数，现给出下列 4 个论断：

①$f(x)$是周期为 4 的周期函数；②$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称；

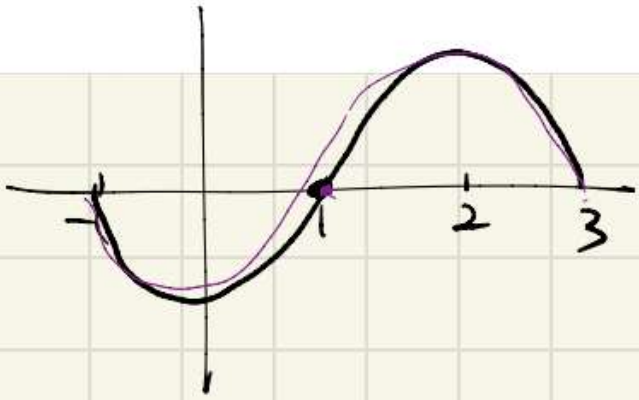
③$f(x)$是偶函数；　④$f(x)$的图象经过点$(-2,0)$；

其中正确论断的个数是_____.



例 1　（2021·新高考全国Ⅱ卷·8）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+2)$ 为偶函数，$f(2x+1)$ 为奇函数，则（　　）

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$　　B. $f(-1)=0$　　C. $f(2)=0$　　D. $f(4)=0$



4、已知函数 $f(x)$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+2)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$，且 $f(1)=-2$，则 $f(2005)$ 的值为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\frac{1}{2}$

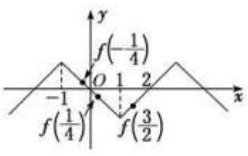
4. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，且在 $[0,1]$ 上是减函数，则有（　　）

A. $f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(-\frac{1}{4}\right)<f\left(\frac{1}{4}\right)$

B. $f\left(\frac{1}{4}\right)<f\left(-\frac{1}{4}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)$

C. $f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{1}{4}\right)<f\left(-\frac{1}{4}\right)$

D. $f\left(-\frac{1}{4}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{1}{4}\right)$



15．(多选)已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(2-x)=0$，则下列结论正确的是(　　)

A．$f(x)$ 的图象关于点(1,0)对称

B．$f(x+2)=f(x)$

C．$f(3-x)=f(x-1)$

D．$f(x-2)=f(x)$

解析　对于 A，由 $f(x)+f(2-x)=0$，得 $f(x)$ 的图象关于点(1,0)对称，A 正确；对于 B，用 $-x$ 替换 $f(x)+f(2-x)=0$ 中的 x，得 $f(-x)+f(2+x)=0$，所以 $f(x+2)=-f(-x)=f(x)$，B 正确；对于 C，用 $x-1$ 替换 $f(x)+f(2-x)=0$ 中的 x，得 $f(3-x)=-f(x-1)$，C 错误；对于 D，用 $x-2$ 替换 $f(x+2)=f(x)$ 中的 x，得 $f(x-2)=f(x)$，D 正确。

答案　ABD

若对称 $\Rightarrow f(x)+f(-x)=0$，奇函数形式，点对称

对称点 $\frac{x+(2-x)}{2}=1 \Rightarrow (1,0)$

推广：若 $f(x)+f(a-x)=0$

对称点 $\frac{x+a-x}{2}=\frac{a}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2},0\right)$

若 $f(b+x)+f(a-x)=0$

对称点 $\frac{(b+x)+(a-x)}{2}=\frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2},0\right)$

12．(2021·达州模拟)$f(x)$ 是定义域为 **R** 的偶函数，$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+4)=f(-x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^x-1, & 0\leqslant x<1,\\ \log_2 x+1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{9}{2}\right)+f(21)=$_____。

解析　根据题意，$f(x)$ 是定义域为 **R** 的偶函数，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+4)=f(-x)$，则有 $f(x+4)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则有 $f\left(-\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(4+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(21)=f(1+4\times 5)=f(1)$，又由当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^x-1, & 0\leqslant x<1,\\ \log_2 x+1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-1$，$f(1)=1$，则 $f\left(-\frac{9}{2}\right)+f(21)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=(\sqrt{2}-1)+1=\sqrt{2}$。

答案　$\sqrt{2}$

奇偶性

奇偶函数的加减乘除：（借助基本函数巧记）

、和函数、积函数、复合函数奇偶性

若两函数有公共定义域，则以下结论成立

(1) 奇± 奇=奇；偶±偶=偶；奇±偶=非奇非偶

(2) 奇×奇=偶；偶×偶=偶；奇×偶=奇

(3) 奇÷奇=偶；偶÷偶=偶；奇÷偶=奇；偶÷奇=奇

(4) 对于复合函数　奇（奇）=奇；奇（偶）=奇；偶（奇）=偶；偶（偶）=偶

奇±奇=奇：$x+x=2x$

偶±偶=偶：$x^2+x^2=2x^2$

奇±偶=双非：$x+x^2=x(x+1)$

奇×(÷)奇=偶：$x\cdot x=x^2$

$x^3\div x=x^2$

偶×(÷)偶=偶：$x^2\cdot x^2=x^4$

$x^4\div x^2=x^2$

奇×(÷)偶=奇：$x\cdot x^2=x^3$

一、奇函数知识点

1、 奇函数的定义：$\forall x\in I$，有$f(-x)=-f(x)$成立，称函数$f(x)$是定义在I上的奇函数

(定义中隐藏着定义域必须关于原点对称)

注意：1、奇偶性只对自变量x而言

2、括号里的整体变成原来的相反数，函数值变为相反数

3、$f(x)$的图象关于原点$(0,0)$对称，即满足代数式$f(x)+f(-x)=0$

2、 奇函数形式的推广（记结论的时候结合图象的对称性，理解会更深，概念会更清晰）

①若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x+a)=-f(-(x+a))=-f(-x-a)$ 满足代数式 $f(x+a)+f(-x-a)=0$ ， $f(x)$ 的图象关于 $(0,0)$ 对称
②若 $f(x+a)$ 是奇函数，则 $f(x+a)=-f(-x+a)$ 满足代数式 $f(x+a)+f(-x+a)=0$ ， $f(x)$ 的图象关于 $(a,0)$ 对称
③若 $f(x)+a$ 是奇函数，则 $f(x)+a=-[f(-x)+a]=-f(-x)-a$ 满足代数式 $f(x)+f(-x)=-2a$ ， $f(x)$ 的图象关于 $(0,-a)$ 对称
④若 $f(ax+b)+c$ 是奇函数，可设 $g(x)=f(ax+b)+c$ 则 $g(-x)=-g(x)\Rightarrow f(-ax+b)+c=-f(ax+b)-c$ 满足代数式 $f(ax+b)+f(-ax+b)=-2c$ ， $f(x)$ 的图象关于 $(b,-c)$ 对称

3、 常见奇函数： $f(x)=ax\pm\dfrac{b}{x}\pm cx^3\pm d\sin x\pm e\tan x$

任意奇函数乘以系数仍然是奇函数，奇函数作加减运算仍然是奇函数

4、 特殊奇函数： $f(x)=a^x-a^{-x}$ $f(x)=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}$

$f(x)=\log_a\dfrac{b-x}{b+x}$ $f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}\pm x)$

以下类型都为奇函数的变式

幂函数型奇函数

$f(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+c+b_1x^{-1}+b_2x^{-2}+\cdots+b_{2n-1}x^{-(2n-1)}+b_{2n}x^{-2n}$ 为奇函数

则 $a_{2n}=a_{2n-2}=\cdots=a_2=c=b_2=\cdots=b_{2n-2}=b_{2n}=0$

(若奇函数中含有偶次项，则偶次项系数一定为零)

指数型奇函数

（1） $f(x)=a^x-a^{-x}$ 证明： $f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=a^{-x}-a^x=-f(x)$

（2） $f(x)=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}$ 证明： $f(-x)=\dfrac{1-a^{-x}}{1+a^{-x}}=\dfrac{a^x(1-a^{-x})}{a^x(1+a^{-x})}=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$

（3） $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 证明： $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{a^{-x}+a^{-(-x)}}=\dfrac{a^{-x}-a^x}{a^{-x}+a^x}=-f(x)$

注意： $\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ ， $\dfrac{1+a^x}{1-a^x}$ ， $\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ ， $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ ， $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$ 也都是奇函数

$f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=\dfrac{a^x+1-2}{a^x+1}=1-\dfrac{2}{a^x+1}$ 也是奇函数

易错题：

①若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{e^x+a}$ 是奇函数，则 $a=\pm1$ （注意答案是两解，不能用 $f(0)=0$ 求解）

②若 $f(x)=\dfrac{a-e^x}{1+ae^x}$ 是奇函数，则 $a=\pm1$ （注意答案是两解，不能用 $f(0)=0$ 求解）

③若 $f(x)=\dfrac{ae^x+c}{e^x\pm1}$ 是奇函数，则 $a=\mp c$

④若 $f(x)=\dfrac{1}{e^x\pm1}+a$ 是奇函数，则 $a=\mp\dfrac{1}{2}$

对数型奇函数

(1) $f(x)=\log_a\dfrac{b-x}{b+x}$

证明：定义域显然关于原点对称

$$f(-x)+f(x)=\log_a\frac{b+x}{b-x}+\log_a\frac{b-x}{b+x}=\log_a\frac{b+x}{b-x}\frac{b-x}{b+x}=\log_a1=0$$

(2) $f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}\pm x)$　　不妨证 $f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$ 是奇函数

证明：$f(-x)+f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)+\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)=\log_a1=0$

注意：$\log_a\dfrac{b+x}{b-x}$，$\log_a\dfrac{x-b}{x+b}$，$\log_a\dfrac{x+b}{x-b}$，$\log_a(\sqrt{1+b^2x^2}\pm bx)$ 也都是奇函数

二、偶函数知识点

1、 偶函数定义：$\forall x\in I$，有 $f(-x)=f(x)$ 成立，称函数 $f(x)$ 是定义在 I 上的偶函数

（定义中隐藏着定义域必须关于原点对称）

注意：1、奇偶性只对自变量 x 而言

2、括号里的整体变成原来的相反数，函数值不变

3、 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，即满足代数式 $f(x)=f(-x)$

2、 偶函数形式的推广（记结论的时候结合图象的对称性，理解会更深，概念会更清晰）

①若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-(x+a))=f(-x-a)$ 满足代数式 $f(x+a)=f(-x-a)$，$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
②若 $f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x+a)$ 满足代数式 $f(x+a)=f(-x+a)$，$f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称

幂函数型偶函数

$f(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+c+b_1x^{-1}+b_2x^{-2}+\cdots+b_{2n-1}x^{-(2n-1)}+b_{2n}x^{-2n}$ 为偶函数

则 $a_{2n-1}=a_{2n-3}=\cdots=a_1=c=b_1=\cdots=b_{2n-3}=b_{2n-1}=0$

(若偶函数中含有奇次项，则奇次项系数一定为零)

奇变性偶函数（奇函数× 奇函数=偶函数）

由于特殊偶函数的种类较少，所以出题者在命题时，往往借助特殊函数来构造偶函数

例如：$f(x)=x(a^x-a^{-x})$，$f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{x}$，$f(x)=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}\cdot x$，$f(x)=x\log_a\dfrac{b-x}{b+x}$，

$f(x)=x\log_a(\sqrt{1+x^2}\pm x)$ 等等都是偶函数

四、任意函数等于奇部加偶部

只要函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则 $f(x)$ 都可以表示成“奇函数与偶函数之和”

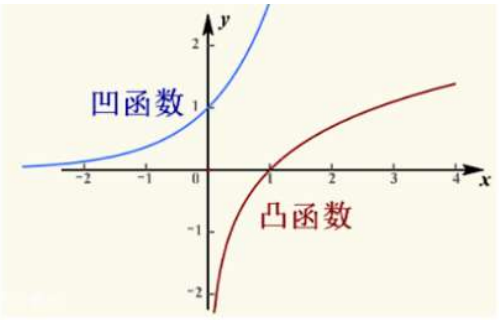
其中这个奇函数叫做 $f(x)$ 的奇部，偶函数叫做 $f(x)$ 的偶部

引理：$f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，

其中 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 叫做 $f(x)$ 的奇部，$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 叫做 $f(x)$ 的偶部

例如：函数 $f(x)=e^x$ 可以拆分成奇函数 $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和偶函数 $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 之和

凹凸性



凹函数：对于某区间内 $\forall x_1,x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

凸函数：对于某区间内 $\forall x_1,x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值.

解题 **技巧点拨**

因为函数 $y=\sin x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上是上凸函数，则

$\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\leqslant \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

即 $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $\sin A=\sin B=\sin C$ 时，即 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，取等号.

上述例题是三角形中一个重要的不等式：在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例 2 (2021·黑龙江模拟) 丹麦数学家琴生 (*Jensen*) 是 19 世纪对数学分析做出卓越贡献的数学家，特别是在函数的凹凸性与不等式方面留下了很多宝贵的成果. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的导函数为 $f'(x)$，$f'(x)$ 在 (a,b) 上的导函数为 $f''(x)$，若在 (a,b) 上 $f''(x)<0$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为“凸函数”. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x-x\ln x-\frac{m}{2}x^2$ 在 $(1,4)$ 上为“凸函数”，则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $(\mathrm{e}-1,+\infty)$　　B. $[\mathrm{e}-1,+\infty)$　　C. $\left[\mathrm{e}^4-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(\mathrm{e}^4-\frac{1}{4},+\infty\right)$

解题 **技巧点拨**

因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-x\ln x-\frac{m}{2}x^2$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-(1+\ln x)-mx=\mathrm{e}^x-mx-\ln x-1$，

$f''(x)=\mathrm{e}^x-m-\frac{1}{x}$，

因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-x\ln x-\frac{m}{2}x^2$ 在 $(1,4)$ 上为“凸函数”，

所以 $f''(x)=\mathrm{e}^x-m-\frac{1}{x}<0$ 对于 $x\in(1,4)$ 恒成立，

可得 $m>\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$ 对于 $x\in(1,4)$ 恒成立，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，则 $m>g(x)_{\max}$，

因为 $g'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$ 在 $(1,4)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\max}<g(4)=\mathrm{e}^4-\frac{1}{4}$，

所以 $m\geqslant\mathrm{e}^4-\frac{1}{4}$，

【答案】C

题目 2 (2021·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 a,b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

【答案】(1)$f(x)$ 的递增区间为 $(0,1)$，递减区间为 $(1,+\infty)$；(2) 证明见解析.

【分析】(1) 首先确定函数的定义域，然后求得导函数的解析式，由导函数的符号即可确定原函数的单调性.

(2) 方法二：将题中的等式进行恒等变换，令 $\frac{1}{a}=m,\frac{1}{b}=n$，命题转换为证明：$2<m+n<\mathrm{e}$，然后构造对称差函数，结合函数零点的特征和函数的单调性即可证得题中的结论.

【详解】(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

由 $f(x)=x(1-\ln x)$ 得，$f'(x)=-\ln x$，

当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$；当 $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 内为增函数，在区间 $[1,+\infty)$ 内为减函数，

(2) **[方法一]：等价转化**

由 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\frac{1}{a}\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{b}\left(1-\ln\frac{1}{b}\right)$，即 $f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$.

由 $a\neq b$，得 $\frac{1}{a}\neq\frac{1}{b}$.

由 (1) 不妨设 $\frac{1}{a}\in(0,1),\frac{1}{b}\in(1,+\infty)$，则 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，从而 $f\left(\frac{1}{b}\right)>0$，得 $\frac{1}{b}\in(1,\mathrm{e})$，

①令 $g(x)=f(2-x)-f(x)$，

则 $g'(x)=\ln(2-x)+\ln x=\ln(2x-x^2)=\ln[1-(x-1)^2]$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内为减函数，$g(x)>g(1)=0$，

从而 $f(2-x)>f(x)$，所以 $f\left(2-\frac{1}{a}\right)>f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$，

由 (1) 得 $2-\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 即 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. ①

令 $h(x)=x+f(x)$，则 $h'(x)=1+f'(x)=1-\ln x$，

当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内为增函数，$h(x)<h(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，

从而 $x+f(x)<\mathrm{e}$，所以 $\frac{1}{b}+f\left(\frac{1}{b}\right)<\mathrm{e}$.

又由 $\frac{1}{a}\in(0,1)$，可得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{a}\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<f\left(\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b}=\mathrm{e}$. ②

由①②得 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

[方法二]【最优解】：$b\ln a-a\ln b=a-b$ 变形为 $\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，所以 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$.

令 $\frac{1}{a}=m,\frac{1}{b}=n$. 则上式变为 $m(1-\ln m)=n(1-\ln n)$，

于是命题转换为证明：$2<m+n<\mathrm{e}$.

令 $f(x)=x(1-\ln x)$，则有 $f(m)=f(n)$，不妨设 $m<n$.

由 (1) 知 $0<m<1,1<n<\mathrm{e}$，先证 $m+n>2$.

要证：$m+n>2\Leftrightarrow n>2-m\Leftrightarrow f(n)<f(2-m)\Leftrightarrow f(m)<f(2-m)$

$\Leftrightarrow f(m)-f(2-m)<0.$

令 $g(x)=f(x)-f(2-x),x\in(0,1)$，

则 $g'(x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]\geqslant-\ln 1=0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增，所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $m+n>2.$

再证 $m+n<\mathrm{e}.$

因为 $m(1-\ln m)=n\cdot(1-\ln n)>m$，所以需证 $n(1-\ln n)+n<\mathrm{e}\Rightarrow m+n<\mathrm{e}.$

令 $h(x)=x(1-\ln x)+x,x\in(1,\mathrm{e})$，

所以 $h'(x)=1-\ln x>0$，故 $h(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内单调递增.

所以 $h(x)<h(\mathrm{e})=\mathrm{e}.$ 故 $h(n)<\mathrm{e}$，即 $m+n<\mathrm{e}.$

综合可知 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}.$

[方法三]：比值代换

证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$ 同证法 2. 以下证明 $x_1+x_2<\mathrm{e}.$

不妨设 $x_2=tx_1$，则 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，

由 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$ 得 $x_1(1-\ln x_1)=tx_1[1-\ln(tx_1)]$，$\ln x_1=1-\frac{t\ln t}{t-1}$，

要证 $x_1+x_2<\mathrm{e}$，只需证 $(1+t)x_1<\mathrm{e}$，两边取对数得 $\ln(1+t)+\ln x_1<1$，

即 $\ln(1+t)+1-\frac{t\ln t}{t-1}<1$，

即证 $\frac{\ln(1+t)}{t}<\frac{\ln t}{t-1}.$

记 $g(s)=\frac{\ln(1+s)}{s},s\in(0,+\infty)$，则 $g'(s)=\frac{\frac{s}{1+s}-\ln(1+s)}{s^2}.$

记 $h(s)=\frac{s}{1+s}-\ln(1+s)$，则 $h'(s)=\frac{1}{(1+s)^2}-\frac{1}{1+s}<0$，

所以，$h(s)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减. $h(s)<h(0)=0$，则 $g'(s)<0$，

所以 $g(s)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减.

由 $t\in(1,+\infty)$ 得 $t-1\in(0,+\infty)$，所以 $g(t)<g(t-1)$，

即 $\frac{\ln(1+t)}{t}<\frac{\ln t}{t-1}.$

[方法四]：构造函数法

由已知得 $\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，令 $\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$，

不妨设 $x_1<x_2$，所以 $f(x_1)=f(x_2).$

由（Ⅰ）知，$0<x_1<1<x_2<e$，只需证 $2<x_1+x_2<e$.

证明 $x_1+x_2>2$ 同证法 2.

再证明 $x_1+x_2<e$. 令 $h(x)=\dfrac{1-\ln x}{x-e}(0<x<e), h'(x)=\dfrac{-2+\frac{e}{x}+\ln x}{(x-e)^2}$.

令 $\varphi(x)=\ln x+\dfrac{e}{x}-2(0<x<e)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{x^2}=\dfrac{x-e}{x^2}<0$.

所以 $\varphi(x)>\varphi(e)=0, h'(x)>0$，$h(x)$ 在区间 $(0,e)$ 内单调递增.

因为 $0<x_1<x_2<e$，所以 $\dfrac{1-\ln x_1}{x_1-e}<\dfrac{1-\ln x_2}{x_2-e}$，即 $\dfrac{1-\ln x_1}{1-\ln x_2}>\dfrac{x_1-e}{x_2-e}$

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $\dfrac{1-\ln x_1}{1-\ln x_2}=\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{x_1-e}{x_2-e}$，

即 $x_2^2-ex_2<x_1^2-ex_1, (x_1-x_2)(x_1+x_2-e)>0$.

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2<e$，即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$.

综上，有 $2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$ 结论得证.

【整体点评】(2) 方法一：等价转化是处理导数问题的常见方法，其中利用的对称差函数，构造函数的思想，这些都是导数问题必备的知识和技能.

方法二：等价转化是常见的数学思想，构造对称差函数是最基本的极值点偏移问题的处理策略.

方法三：比值代换是一种将双变量问题化为单变量问题的有效途径，然后构造函数利用函数的单调性证明题中的不等式即可.

方法四：构造函数之后想办法出现关于 $x_1+x_2-e<0$ 的式子，这是本方法证明不等式的关键思想所在.

导数

1、导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2、导数的几何意义：导数值 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率

3、常见函数的导数：

$C'=0$

$(x^n)'=nx^{n-1}(n\in Q)$;

$(\sin x)'=\cos x$;

$(\cos x)'=-\sin x$;

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$;

$(e^x)'=e^x$;

$(a^x)'=a^x\ln a$.

4、导数的四则运算：$(u\pm v)'=u'\pm v'$ ； $(uv)'=u'v\pm v'u$ ； $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ； $[ku(x)]'=ku'(x)$

5、复合函数的导数：$f'_x(\varphi(x))=f'(u)\cdot\varphi'(x)$

与 e^x 结合的求导

$e^x\cdot f(x) \Rightarrow e^x f(x)+e^x\cdot f'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$

$\frac{e^x}{f(x)} \Rightarrow \frac{e^x f(x)-e^x\cdot f'(x)}{f^2(x)}=\frac{e^x[f(x)-f'(x)]}{f^2(x)}$

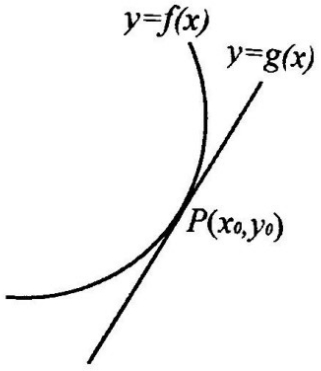
$\frac{f(x)}{e^x} \Rightarrow \frac{f'(x)e^x-f(x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

切线模型

四种切线模型

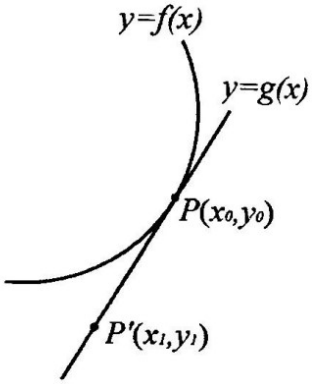
1、在某点处的切线方程

设切点 $P(x_0,y_0)$，解方程组 $\begin{cases}y_0=f(x_0)\\ y_0=g(x_0)\\ f'(x_0)=g'(x_0)\end{cases}$



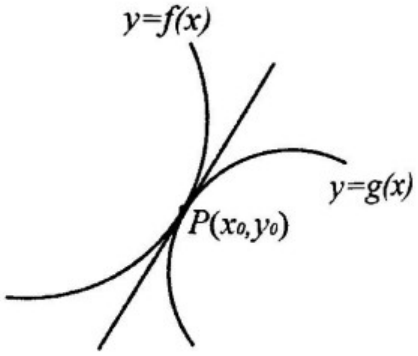
2、过某点处的切线方程

设切点 $P(x_0,y_0)$，解方程组 $\begin{cases} y_0=f(x_0) \\ y_0=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0)=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1} \\ y_1=g(x_1) \end{cases}$



3、公共切点模型

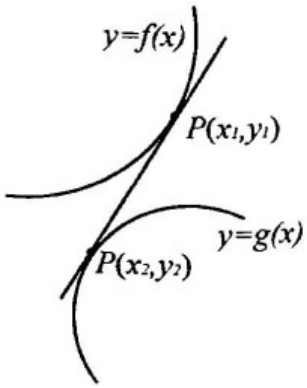
设切点 $P(x_0,y_0)$，解方程组 $\begin{cases} y_0=f(x_0) \\ y_0=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$



4、公共切线模型

设切点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$

解方程组 $\begin{cases} y_1=f(x_1) \\ y_2=g(x_2) \\ f'(x_1)=g'(x_2)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{cases}$



导数大题

1.单调性（分类讨论思想）

例 1： 已知函数 $f(x)=xe^x-a(\frac{1}{2}x^2+x)(a\in R)$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意得 $f'(x)=e^x+xe^x-a(x+1)=(x+1)(e^x-a)(x\in R)$

当 $a\le 0$ 时，$e^x-a>0$ 恒成立

令 $f'(x)>0\Rightarrow x>-1$，$f(x)$ 递增；令 $f'(x)<0\Rightarrow x<-1$，$f(x)$ 递减.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x_1=\ln a$ 或 $x_2=-1$

当 $\ln a=-1\Rightarrow a=\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 R 上递增

当 $\ln a>-1\Rightarrow a>\frac{1}{e}$ 时，令 $f'(x)>0\Rightarrow x>\ln a$ 或 $x<-1$，$f(x)$ 递增；

令 $f'(x)<0\Rightarrow -1<x<\ln a$，$f(x)$ 递减.

当 $\ln a<-1\Rightarrow 0<a<\frac{1}{e}$ 时，令 $f'(x)>0\Rightarrow x>-1$ 或 $x<\ln a$，$f(x)$ 递增

令 $f'(x)<0\Rightarrow \ln a<x<-1$，$f(x)$ 递减

综上所述：

当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 的增区间是 $(-1,+\infty)$，减区间是 $(-\infty,-1)$；

当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的增区间为 R；

当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的增区间是 $(-\infty,-1),(\ln a,+\infty)$，减区间是 $(-1,\ln a)$；

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的增区间是 $(-\infty,\ln a),(-1,+\infty)$，减区间是 $(\ln a,-1)$.

例 2： 已知函数 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x}-a\ln x(a\in R)$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}-a\ln x$，$f'(x)=2+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-ax+1}{x^2}(x>0)$

对于 $2x^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2-8$，

当 $a\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ 时，$f'(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

当 $a\in(-\infty,-2\sqrt{2})$ 时，对于 $x>0$，有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

当 $a\in(2\sqrt{2},+\infty)$ 时，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$ 或 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，$f(x)$ 递增；

令 $f'(x)<0$，得 $\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，$f(x)$ 递减

综上所述：

当 $a\in(-\infty,2\sqrt{2}]$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

当 $a\in(2\sqrt{2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$，$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty)$ 上是增函数，

在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$ 上是减函数.

2.参数分离（数形结合）

例 1： 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+a(x-\ln x)$，$e$ 为自然对数的底数

(Ⅰ)当 $a>0$ 时，试求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上有三个不同的极值点，求实数 a 的取值范围

解：由题意得

(Ⅰ) $f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}+a(1-\frac{1}{x})=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{a(x-1)}{x}=\frac{(e^x+ax)(x-1)}{x^2}\ (x>0)$

当 $a>0$ 时，$e^x+ax>0$ 恒成立

令 $f'(x)>0\Rightarrow x>1$，　$f(x)$ 递增；

令 $f'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$，$f(x)$ 递减；

综上：$f(x)$ 的递增区间为 $(1,+\infty)$，$f(x)$ 的递减区间为 $(0,1)$

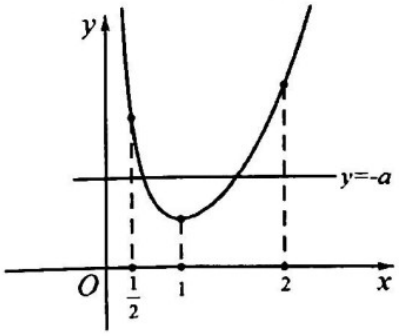
(Ⅱ) $f'(x)=0$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上有三个不同的根

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$ 或 $e^x+ax=0$，故 $e^x+ax=0$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上有两个不同的实数根

$e^x+ax=0\Rightarrow -a=\frac{e^x}{x}$，设 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，$x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$

令 $g'(x)>0\Rightarrow 1<x<2$，$g(x)$ 递增；

令 $g'(x)<0\Rightarrow \frac{1}{2}<x<1$，$g(x)$ 递减；



如图 $g(1)=e$，$g(\frac{1}{2})=2\sqrt{e}$，$g(2)=\frac{e^2}{2}$

又 $g(2)-g(\frac{1}{2})=\frac{e^2}{2}-2\sqrt{e}>0$

$\therefore -a\in(e,2\sqrt{e})\Rightarrow a\in(-2\sqrt{e},-e)$

综上所述：实数 a 的取值范围为 $(-2\sqrt{e},-e)$

例 2： 已知函数 $f(x)=-\ln x-ax^2+x(a\geq 0)$，讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数.

解：由题意得

函数 $f(x)=-\ln x-ax^2+x(a\geq 0)$，

$\therefore f'(x)=-\frac{1}{x}-2ax+1(x>0)=-\frac{2ax^2-x+1}{x}=\frac{-2ax^2+x-1}{x}$，　$x>0$

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{x-1}{x}$，$x>0$，

令 $f'(x)>0 \Rightarrow x\in(1,+\infty)$，$f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0 \Rightarrow x\in(0,1)$，$f(x)$ 单调递减；∴当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值；

当 $a\geq\frac{1}{8}$ 时，$\Delta\leq 0$，故 $f'(x)\leq 0$，∴$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故此时 $f(x)$ 无极值；

当 $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$\Delta>0$，方程 $f'(x)=0$ 有两个不等的正根 x_1，x_2.

记 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$.

令 $f'(x)>0 \Rightarrow x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a},\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}\right)$，$f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0 \Rightarrow x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a},+\infty\right)$，$f(x)$ 单调递减；

∴$f(x)$ 在 $x=x_1$ 处有极小值，在 $x=x_2$ 处有极大值.

综上所述：

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 有 1 个极值点；

当 $a\geq\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 没有极值点；

当 $0<a<\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 有 2 个极值点.

例 3： 已知函数 $f(x)=\ln x+mx^2+1$，$m\in\mathbf{R}$，讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

（讨论函数零点的个数，可先利用函数的导数，判断函数的单调性，进一步讨论函数的取值情况，根据零点存在定理判断（证明）零点的存在性，确定函数零点的个数）

解：由题意得

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}+2mx=\frac{1+2mx^2}{x}$

当 $m\geq 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $0<x<e^{-m-1}$ 时，$f(x)<f\left(e^{-m-1}\right)=-m-1+m\left(e^{-m-1}\right)^2+1\leq 0$，

又 $f(1)=m+1>0$，所以函数 $f(x)$ 有且只有一个零点；

当 $m<0$ 时 令 $f'(x)>0$，得 $x\in\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right)$，函数 $f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0$，得 $x\in\left(\sqrt{-\frac{1}{2m}},+\infty\right)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right)=\ln\left(\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right)+m\times\left(\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right)^2+1=\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2m}\right)+\frac{1}{2}$

当 $\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2m}\right)+\frac{1}{2}<0$，解得 $m<-\frac{e}{2}$，此时函数 $f(x)$ 没有零点；

当 $\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2m}\right)+\frac{1}{2}=0$，即 $m=-\frac{e}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 有 1 个零点；

当 $\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{2m}\right)+\frac{1}{2}>0$，即 $-\frac{e}{2}<m<0$ 时，$f\left(e^{-2}\right)=-2+me^{-4}+1=-1+me^{-4}<0$.

当 $x>1$ 时，令 $g(x)=\ln x-x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g(x)<g(1)=-1$，即 $\ln x<x-1$，

所以 $f(x)=\ln x+mx^2+1<x+mx^2=mx\left(x+\frac{1}{m}\right)$，

故当 $x>1$ 且 $x>-\frac{1}{m}$ 时，$f(x)<0$.当 $-\frac{e}{2}<m<0$ 时，有 $e^{-2}<\sqrt{-\frac{1}{2m}}<-\frac{1}{m}$，

所以函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

综上所述：当 $m<-\frac{e}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 没有零点；

当 $m\geq 0$ 或 $m=-\frac{e}{2}$ 时.函数 $f(x)$ 有 1 个零点；

当 $-\frac{e}{2}<m<0$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

例 4： 已知函数 $f(x)=\ln\frac{ex}{2}-ax$，$g(x)=\frac{x-4a}{x}$

（1）求函数 $f(x)$ 的极值点；

（2）当 $a>0$ 时，当函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 恰有三个不同的零点，求实数 a 的取值范围.

解：由题意得

（1）因为 $f(x)=\ln\frac{ex}{2}-ax$，$f(x)=\ln\frac{x}{2}-ax+1$，所以 $f'(x)=\frac{2}{x}\times\frac{1}{2}-a=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 无极值点；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{a}$.

由 $\begin{cases}f'(x)>0\\x>0\end{cases}$，解得 $0<x<\frac{1}{a}$；由 $\begin{cases}f'(x)<0\\x>0\end{cases}$，解得 $x>\frac{1}{a}$.

故函数 $f(x)$ 有极大值点 $\frac{1}{a}$，无极小值点.

综上：当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值点 $\frac{1}{a}$，无极小值点.

（2）当 $a>0$ 时，$h(x)=f(x)-g(x)=\ln\frac{x}{2}-ax+\frac{4a}{x}(x>0)$ 即 $h'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{4a}{x^2}=\frac{-ax^2+x-4a}{x^2}(x>0)$

设 $k(x)=-ax^2+x-4a$，则 $\Delta=1-16a^2$.

①当 $\begin{cases}\Delta\leqslant 0\\a>0\end{cases}$ 即 $a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，不合题意；

②当 $\begin{cases}\Delta>0\\a>0\end{cases}$ 即 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$k(x)$ 有两个零点 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，

所以 $x_1>0,x_2>0$. 又因为 $k(x)=-ax^2+x-4a$ 开口向下，

当 $0<x<x_1$ 时，$k(x)<0,\therefore h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$k(x)>0,\therefore h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递增；

当 $x>x_2$ 时，$k(x)<0,\therefore h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $h(2)=\ln 1-2a+\frac{4a}{2}=0$，又 $x_1x_2=4$，所以 $x_1<2<x_2$，$\therefore h(x_1)<h(2)=0<h(x_2)$.

$\because h\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{2a^2}-a\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{4a}{\frac{1}{a^2}}=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$，令 $m(a)=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$，

则 $m'(a)=-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+12a^2=\frac{12a^4-2a+1}{a^2}>\frac{1-2a}{a^2}>0$. 所以 $m(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 单调递增，

所以 $m(a)<m\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 2-2\ln\left(\frac{1}{4}\right)-4+4\left(\frac{1}{4}\right)^3=3\ln 2-4+\frac{1}{16}<0$，即 $h\left(\frac{1}{a^2}\right)<0$.

由零点存在性定理知，$h(x)$ 在区间 $\left(x_2,\frac{1}{a^2}\right)$ 上有唯一的一个零点 x_0.

$\because h(x_0)+h\left(\frac{4}{x_0}\right)=\ln\frac{x_0}{2}-ax_0+\frac{4a}{x_0}+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x_0}\right)-a\cdot\frac{4}{x_0}+\frac{4a}{\frac{4}{x_0}}=0$，又 $h(x_0)=0$，所以 $h\left(\frac{4}{x_0}\right)=0$.

所以 $0<\frac{4}{x_0}<x_1$，所以 $h(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上有唯一的一个零点 $\frac{4}{x_0}$，

故当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$h(x)$ 存在三个不同的零点 $\frac{4}{x_0},2,x_0$.

综上所述：实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

例 5： 已知函数 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x}-a\ln x(a\in R)$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)设 $g(x)=e^x-\sin x$，若 $h(x)=g(x)\left(f(x)-2x\right)$ 且 $y=h(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：由题意得

（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)=2x-\frac{1}{x}-a\ln x$，$f'(x)=2+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-ax+1}{x^2}$，

对于 $2x^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2-8$，

当 $a\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ 时，$f'(x)\geq 0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

当 $a\in(-\infty,-2\sqrt{2})$ 时，对于 $x>0$，有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

当 $a\in(2\sqrt{2},+\infty)$ 时，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$ 或 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，$f(x)$ 递增；

令 $f'(x)<0$，得 $\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，$f(x)$ 递减

综上，当 $a\in(-\infty,2\sqrt{2}]$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

当 $a\in(2\sqrt{2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$，$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty)$ 上是增函数，

在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$ 上是减函数.

(II) 由已知可得 $g'(x)=e^x-\cos x$，$g'(x)>0$ 恒成立，所以 $g(x)=e^x-\sin x$ 单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$.

故 $h(x)$ 有两个零点，等价于 $y=f(x)-2x=-\frac{1}{x}-a\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点.

因此原方程可化为 $-\frac{1}{a}=x\ln x(x>0且x\neq 1)$，设 $\phi(x)=x\ln x$，$\phi'(x)=\ln x+1$，

由 $\phi'(x)>0$ 解得 $\frac{1}{e}<x<1$，或 $x>1$；由 $\phi'(x)<0$ 解得 $0<x<\frac{1}{e}$，

故 $\phi(x)=x\ln x$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},1\right),(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $\phi(x)_{\min}=\phi\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，所以 $-\frac{1}{e}<-\frac{1}{a}<0$，所以 $a>e$.

综上所述：实数 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$

例 6： 已知函数 $f(x)=2\cos x-x\sin x+\frac{1}{2}x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 证明：$f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一零点.

(2) 若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geq ax$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解：由题意得

(1) 证明：设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=x\sin x-4\cos x$. 令 $h(x)=g'(x)=x\sin x-4\cos x$，

则 $h'(x)=5\sin x+x\cos x$. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$，则 $g'(x)$ 为增函数，

且 $g'(0)=-1<0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$，所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$.

即 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

又 $\because g(0)=\frac{1}{2}>0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{5}{2}<0$，$\therefore g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一零点，

即 $f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一零点.

（2）当 $x=0$ 时，$f(0)=2\geq a\times 0$；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)\geq ax\Leftrightarrow a\leq\frac{2\cos x}{x}-\sin x+\frac{1}{2}$.

设 $p(x)=\frac{2\cos x}{x}-\sin x+\frac{1}{2}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，即 $p'(x)=\frac{-2x\sin x-2\cos x-x^2\cos x}{x^2}$，

$\because x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore p'(x)<0$，$\therefore p(x)_{\min}=p\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，$\therefore a\leq-\frac{1}{2}$.

综上所述，a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

例 7： 已知函数 $f(x)=xe^x-a\ln x-ax+a-e$.

（1）若 $f(x)$ 为单调函数，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 仅一个零点，求 a 的取值范围.

（1）$f'(x)=e^x(1+x)-\frac{a(1+x)}{x}=(1+x)\frac{(xe^x-a)}{x}\ (x>0)$

因为 $f(x)$ 为单调函数，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)\geq 0$ 或 $f'(x)\leq 0$ 恒成立，

由于 $x+1>1$，于是只需 $a\leq xe^x$ 或 $a\geq xe^x$ 对于 $x>0$ 恒成立，

令 $u(x)=xe^x$，则 $u'(x)=(x+1)e^x$，

当 $x>0$ 时，$u'(x)>0$，所以 $u(x)=xe^x$ 为增函数，

则 $u(x)>u(0)=0$. 则 $a\geq xe^x$ 不可能恒成立，即 $f(x)$ 不可能为单调减函数.

当 $a\leq u(0)$，即 $a\leq 0$ 时，$a\leq xe^x$ 恒成立，所以此时函数为单调递增函数.

（2）因为 $f(1)=0$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个零点. 由（1）知，

当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 的增函数，即函数 $f(x)$ 仅一个零点，满足条件.

当 $a>0$ 时，由 $f'(1)=0$ 得 $a=e$，

（ⅰ）当 $a=e$ 时，$f(x)=xe^x-e\ln x-ex$，则 $f'(x)=xe^x-e$，令 $v(x)=xe^x-e$，

易知$v(x)$为$(0,+\infty)$的增函数，且$v(1)=0$，

当$0<x<1$时，$v(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$递减，

当$x>1$时，$v(x)>0$，即$f'(x)>0$，$f(x)$递增，所以$f(x)\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

又$f(1)=0$，于是函数$f(x)$仅一个零点.

所以$a=e$满足条件.

（ii）当$a>e$时，由于$v(x)=xe^x-a$在$(1,+\infty)$为增函数，

则$v(1)=e-a<0$，当$x\to+\infty$时，$v(x)\to+\infty$.

则存在$x_0>1$，使得$v(x_0)=0$，即使得$f'(x_0)=0$，

当$(1,x_0)$时，$f'(x_0)<0$，当$(x_0,+\infty)$时，$f'(x_0)>0$，

所以$f(x_0)<f(1)=0$，且当$x=+\infty$时，$f(x)=+\infty$.

于是当$(x_0,+\infty)$时存在$f(x)=0$的另一解，不符合题意，舍去.

（iii）当$0<a<e$时，则$v(x)=xe^x-a$在$(1,+\infty)$为增函数，

又$v(0)=-a<0$，$v(1)=e-a>0$，

所以存在$0<x_0<1$，使得$v(x_0)=0$，也就使得$f'(x_0)=0$，

当$(0,x_0)$时，$f'(x_0)<0$，当$(x_0,1)$时，$f'(x_0)>0$，

所以$f(x_0)<f(1)=0$，且当$x=0$时，$f(x)\to+\infty$.

于是在$(0,x_0)$时存在$f(x)=0$的另一解，不符合题意，舍去.

综上，实数a的取值范围为$a\leq 0$或$a=e$.

例8： 已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$g(x)=x\cdot\cos x-\sin x$.

（Ⅰ）判断函数$g(x)$在区间$(0,3\pi)$上零点的个数，并证明；

（Ⅱ）函数$f(x)$在区间$(0,3\pi)$上的极值点从小到大分别为x_1，x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)<0$

解：由题意得

（Ⅰ）$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$，

当$x\in(0,\pi)$时，$\because\sin x>0$，$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在区间$(0,\pi)$上单调递减，

$g(x)<g(0)=0$，$\therefore g(x)$在区间$(0,\pi)$上无零点；

当$x\in(\pi,2\pi)$时，$\because\sin x<0$，$\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在区间$(\pi,2\pi)$上单调递增，

$g(\pi)=-\pi<0$，$g(2\pi)=2\pi>0$，$\therefore g(x)$在区间$(\pi,2\pi)$上唯一零点；

当$x\in(2\pi,3\pi)$时，$\because\sin x>0$，$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在区间$(2\pi,3\pi)$上单调递减，

$g(2\pi)=2\pi>0$，$g(3\pi)=-3\pi<0$；$\therefore g(x)$ 在区间 $(2\pi,3\pi)$ 上唯一零点；

综上：函数 $g(x)$ 在区间 $(0,3\pi)$ 上有两个零点.

（II）$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，由（I）知 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 无极值点；在 $(\pi,2\pi]$ 有极小值点，即为 x_1；在 $(2\pi,3\pi]$ 有极大值点，即为 x_2，由 $x_n\cos x_n-\sin x_n=0$，即 $x_n=\tan x_n$

$\because x_2>x_1$，$\therefore \tan x_2>\tan(x_1+\pi)$，

$\because g(\pi)<0$，$g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1<0$，$g(2\pi)>0$，$g\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)<0$，以及 $y=\tan x$ 的单调性，

$\therefore x_1\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$x_2\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$，$\because x_2$，$x_1+\pi\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$，

由函数 $y=\tan x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递增，得 $x_2>x_1+\pi$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{\sin x_1}{x_1}+\dfrac{\sin x_2}{x_2}=\cos x_1+\cos x_2$，

由 $y=\cos x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递减，得 $\cos x_2<\cos(x_1+\pi)=-\cos x_1$，

即 $\cos x_2+\cos x_1<0$，故 $f(x_1)+f(x_2)<0$.

例 9： 已知函数 $f(x)=\ln x-x+2\sin x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（1）求证：$f'(x)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上存在唯一零点；

（2）求证：$f(x)$ 有且仅有两个不同的零点.

（1）设 $g(x)=f'(x)=\dfrac{1}{x}-1+2\cos x$，所以 $g'(x)=-2\sin x-\dfrac{1}{x^2}<0$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上恒成立

所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，又 $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{\pi}-1+1>0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}-1<0$

所以 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一的零点 α，所以命题得证.

(2) ①由(1)知：当 $x\in(0,\alpha)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 上单调递增；

当 $x\in(\alpha,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 (α,π) 上单调递减；

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一的极大值点 $\alpha\left(\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

所以 $f(\alpha)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}+2>2-\dfrac{\pi}{2}>0$

又因为 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2-\frac{1}{e^2}+2\sin\frac{1}{e^2}<-2-\frac{1}{e^2}+2<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 上恰有一个零点.

又因为 $f(\pi)=\ln\pi-\pi<2-\pi<0$，所以 $f(x)$ 在 (α,π) 上也恰有一个零点.

②当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时，$\sin x\le 0$，$f(x)\le\ln x-x$，设 $h(x)=\ln x-x$，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$

所以 $h(x)$ 在 $[\pi,2\pi)$ 上单调递减，所以 $h(x)\le h(\pi)<0$

当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时，$f(x)\le h(x)\le h(\pi)<0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi)$ 上没有零点.

③当 $x\in[2\pi,+\infty)$ 时，$f(x)\le\ln x-x+2$，设 $\varphi(x)=\ln x-x+2$，$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1<0$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[2\pi,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)\le\varphi(2\pi)<0$

当 $x\in[2\pi,+\infty)$ 时，$f(x)\le\varphi(x)\le\varphi(2\pi)<0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $[2\pi,+\infty)$ 上没有零点.

综上：$f(x)$ 有且仅有两个零点.

例 10： 已知函数 $f(x)=a^2\ln x-x^2+ax$，若 $f(x)<0$，求 a 的取值范围.

解：由题意得

$f'(x)=\frac{a^2}{x}-2x+a=\frac{-2x^2+ax+a^2}{x}=\frac{(2x+a)(-x+a)}{x}$，由题知 $f(x)_{max}<0$，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=a$，

当 $0<x<a$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $y=f(x)$ 单调递增；

当 $x>a$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $y=f(x)$ 单调递减.

$\therefore f(x)_{max}=f(a)=a^2\ln a-a^2+a^2=a^2\ln a<0$，$\therefore 0<a<1$；

当 $a=0$ 时，$f(x)=-x^2<0$，成立；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=-\frac{a}{2}$，

当 $0<x<-\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，此时，函数 $y=f(x)$ 单调递增；

当 $x>-\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)<0$，此时，函数 $y=f(x)$ 单调递减.

$\therefore f(x)_{max}=f\left(-\frac{a}{2}\right)=a^2\ln\left(-\frac{a}{2}\right)-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=a^2\ln\left(-\frac{a}{2}\right)-\frac{3}{4}a^2<0$，

即 $\ln\left(-\frac{a}{2}\right)<\frac{3}{4}$，得 $0<-\frac{a}{2}<e^{\frac{3}{4}}$，解得 $-2e^{\frac{3}{4}}<a<0$.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left(-2e^{\frac{3}{4}},1\right)$

例 11： 已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$.

（1）若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切，求实数 a 的值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

解：由题意得

(1) $f'(x)=\frac{1-ax}{x}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{a}$，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切，所以 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$，

即 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-a\left(\frac{1}{a}-1\right)=a-1-\ln a=0$，令 $h(x)=x-1-\ln x$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$，

所以 $a-1-\ln a=0$ 有唯一解 $a=1$，即实数 a 的值为 1.

(2) $f'(x)=\frac{1-ax}{x}$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $f(1)=0$，函数有唯一零点；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=a-1-\ln a$，由 (1) $h(x)=x-1-\ln x$ 的单调性知

(i) 当 $a=1$ 时，$f(x)_{\max}=0$，所以函数只有一个零点；

(ii) 当 $0<a<1$ 时，$f\left(\frac{1}{a}\right)=a-1-\ln a>0$，$f(1)=0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上有一个零点，$f\left(\frac{1}{a^2}\right)=a-\frac{1}{a}-2\ln a$，

令 $p(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，则 $p'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\ge 0$，所以函数 $p(x)$ 递增，

又 $p(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$p(x)<0$，所以 $f\left(\frac{1}{a^2}\right)=a-\frac{1}{a}-2\ln a<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上有一个零点，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点；

(iii) 当 $a>1$ 时，$f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)=a-1-\ln a>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上有一个零点，

当 $0<x<\frac{1}{e^a}$ 时，$\ln x<-a$，$f(x)=\ln x-a(x-1)<-a-a(x-1)=-ax<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上有一个零点，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，

综上所述：

当 $a\le 0$ 或 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一零点；

当 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.

例 12： 已知函数 $f(x)=e^x+a(x+\frac{1}{x}+2)$ 在区间 $(-1,0)$ 内存在零点.

(1) 求 a 的范围；

(2) 设 $a>\frac{2}{e^2}$，$x_1,x_2(x_2<x_1)$ 是 $f(x)$ 的两个零点，求证：$x_1-x_2<2$.

解：由题意得

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-1,0)$ 有解，即方程 $xe^x+a(x+1)^2=0$ 在区间 $(-1,0)$ 有解，

设函数 $g(x)=xe^x+a(x+1)^2$，即 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 存在零点．因为 $g'(x)=(x+1)(e^x+2a)$，

若 $a>0$，则 $e^x+2a>0$，$x+1>0$，$g'(x)>0$ 成立，$g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 单调递增，

$g(0)=a>0$，$g(-1)=-\frac{1}{e}<0$，$g(0)\cdot g(-1)<0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 存在零点；

若 $a=0$，则 $g'(x)=xe^x<0$，$g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减，

且 $g(x)>g(0)=a=0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 无零点；

若 $a<0$，则 $xe^x<0$，$a(x+1)^2<0$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)<g(-1)<0$，故 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 无零点；

综上所述：$a>0$．

（2）由（1）可知，$a>\frac{2}{e^2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 单调递减，在区间 $(-1,+\infty)$ 单调递增，

且 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 存在一个零点；又 $g(-2)=-\frac{2}{e^2}+a>0$，$g(-2)\cdot g(-1)<0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(-2,-1)$ 也存在一个零点，从而 $-2<x_2<x_1<0$，

所以 $x_1-x_2<2$，证毕．

3.不等式放缩

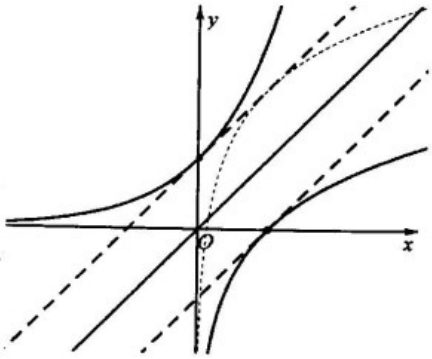
常用函数不等式放缩：

$$\begin{cases} x-1\geq \ln x(x>0) \\ x\geq \ln(x+1)(x>-1) \\ \ln x\geq 1-\frac{1}{x}(x>0) \\ \frac{x^2-1}{2}\geq \ln x(x>0) \\ x-\frac{1}{x}\geq 2\ln x(x>0) \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}>\ln(n+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x\geq x+1 \\ e^{x-1}\geq x \\ e^x\geq \frac{x^2}{2}+x+1 \\ \frac{1}{e^x}\geq 1-x \\ \frac{e^{x+1}+e^{x-1}}{2}\geq x+1 \\ \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\ln n \end{cases}$$

例 1： 证明下列不等式

（Ⅰ）$e^x > \ln x + 2$；

（Ⅱ）$e^x \geq \sin x + 1 (x \geq 0)$



解：由题意得

（Ⅰ）证明：先证 $e^x > x+1$

设 $f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 (x > 0)$

此时 $f'(x) > 0$ 恒成立，$f(x)$ 递增；

$\therefore f(x) > f(0) = 0$ 恒成立，即 $e^x > x+1$

再证 $x - 1 \geq \ln x$

设 $g(x) = x - 1 - \ln x \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} (x > 0)$

令 $g'(x) > 0 \Rightarrow x > 1$，　$g(x)$ 递增；

令 $g'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$，$g(x)$ 递减；

$\therefore g(x) \geq g(1) = 0$ 恒成立，即 $x - 1 \geq \ln x$

综上：$e^x > x+1 \geq (\ln x + 1) + 1 = \ln x + 2$，证毕

（Ⅱ）先证 $e^x \geq x+1$，证法见（Ⅰ）

再证 $x \geq \sin x$

设 $h(x) = x - \sin x \Rightarrow h'(x) = 1 - \cos x$

显然 $h'(x) \geq 0$ 恒成立，$\therefore h(x)$ 递增，即 $h(x) = x - \sin x \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow x \geq \sin x$

综上：$e^x \geq x+1 \geq \sin x + 1$，证毕

例 2： 已知函数 $f(x) = e^x - (x+a)\ln(x+a) + x, a \in R$ 在定义域上为单调函数，求 a 的最大整数值.

解：由题意得

函数 $f(x)$ 在定义域上为单调函数，则 $f'(x) \geq 0$ 恒成立. 由 $e^x \geq x+1$ 和 $\ln x \leq x - 1$ 得

$\ln(x+2) \leq (x+2) - 1 = x+1$，所以 $e^x \geq x+1 \geq \ln(x+2)$，

当 $a \leq 2$ 时，$e^x \geq x+1 \geq \ln(x+2) \geq \ln(x+a)$，$f'(x) = e^x - \ln(x+a) \geq 0$ 恒成立；

当 $a \geq 3$ 时，$f'(x) = e^x - \ln(x+a) \geq 0$ 不恒成立；

故 a 的最大整数值为 2.

例 3： 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，其中 $a\in R$，若 $a=1$，证明：$f(x)<\frac{e^x+\cos x}{x}$.

解：由题意得

（1）若 $a=1$，则 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x>0)$

要证 $f(x)<\frac{e^x+\cos x}{x}$，只需证 $x\ln x+1<e^x+\cos x$，即证：$x\ln x<e^x+\cos x-1$.

当 $0<x\le 1$ 时，$x\ln x\le 0$，而 $e^x+\cos x-1>1+\cos 1-1=\cos 1>0$，故成立.

当 $x>1$ 时，令 $g(x)=e^x+\cos x-x\ln x-1$，$x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=e^x-\sin x-\ln x-1$

设 $h(x)=g'(x)=e^x-\sin x-\ln x-1$，则 $h'(x)=e^x-\cos x-\frac{1}{x}$

$\because x>1$，$\therefore h'(x)=e^x-\cos x-\frac{1}{x}>e-1-1>0$

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$h(x)$ 单调递增，$\therefore h(x)>h(1)=e-\sin 1-1>0$，即 $g'(x)>0$

$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$\therefore g(x)>g(1)=e+\cos 1-1>0$

即 $g(x)=e^x+\cos x-x\ln x-1>0$，即 $x\ln x<e^x+\cos x-1$，$\therefore f(x)<\frac{e^x+\cos x}{x}$

综上：当 $x>0$ 时，有 $f(x)<\frac{e^x+\cos x}{x}$ 成立.

例 4： 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-a(x+1),g(x)=\frac{f(x)}{x+1}(a\in R)$

（1）求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）若 $0<a<e$

（i）证明 $f(x)$ 恰有两个零点；

（ii）设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，x_1 为 $f(x)$ 的零点，且 $x_1>x_0$ 证明：$2x_0+1>x_1$.

解：由题意得

（1）$g(x)=\frac{f(x)}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}e^x-a,(x\ne -1)$ $\therefore g'(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x>0$，

因此，$g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

(2) (i) $f(x)=(x-1)e^x-a(x+1)$，$f'(x)=xe^x-a$，

当 $x<0$ 时，$\because 0<a<e$，则 $f'(x)=xe^x-a<0$；

当 $x\geq 0$ 时，令 $L(x)=xe^x-a, L'(x)=(x+1)e^x>0$，则 $L(x)=xe^x-a$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

而 $L(0)=0\cdot e^0-a<0, L(1)=e-a>0$，

故存在 $x_0\in(0,1)$，使 $L(x_0)=x_0e^{x_0}-a=0$，即 $a=x_0e^{x_0}$，

且在 $(0,x_0)$ 上 $f'(x)<0$，在 $(x_0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-a(x_0+1)$，

又 $a=x_0e^{x_0}$，则 $f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-x_0e^{x_0}(x_0+1)=e^{x_0}(-1-x_0^2)<0$，

而 $f(1)=-2a<0, f(3)=2e^3-4a>0$，

$f(0)=-1-a<0, f(\ln a-10)=a\left[\frac{\ln a-11}{e^{10}}+9-\ln a\right]>0$，（注：取值不唯一）

$\therefore f(x)=(x-1)e^x-a(x+1)$ 恰有两个零点；

(ii) $\because x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点，x_1 为 $f(x)$ 的零点，且 $x_1>x_0$，故由 (i) 可知 $x_1>1$，

并且有 $a=x_0e^{x_0}$，$f(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-a(x_1+1)=0$，则 $a=\frac{(x_1-1)e^{x_1}}{(x_1+1)}$，

因此，$x_0e^{x_0}=\frac{(x_1-1)e^{x_1}}{(x_1+1)}$ 即 $\frac{x_0(x_1+1)}{(x_1-1)}=e^{x_1-x_0}$，而当 $x>0$ 时，$e^x>x+1$（证明略）

那么对于 $\frac{x_0(x_1+1)}{(x_1-1)}=e^{x_1-x_0}$ 有 $\frac{x_0(x_1+1)}{(x_1-1)}=e^{x_1-x_0}>x_1-x_0+1$，可得 $2x_0>x_1-\frac{1}{x_1}$，而 $x_1>1$，

$\therefore 2x_0>x_1-\frac{1}{x_1}>x_1-1$ 即 $2x_0+1>x_1$，证毕

例 5： 已知函数 $f(x)=e^x-a\ln(x-1)$.（其中常数 $e=2.718\,28\cdots$，是自然对数的底数）

（1）若 $a\in\mathbf{R}$，求函数 $f(x)$ 的极值点个数；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,1+e^{-a})$ 上不单调，证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>a$.

解：由题意得

(1) $f'(x)=\frac{(x-1)e^x-a}{x-1}, x>1$，

当 $a\leq 0$，$f'(x)>0$，函数递增，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 无极值点，即此时极值点个数为 0；

当 $a>0$，易知函数 $y=e^x$ 的图象与 $y=\frac{a}{x-1}(a>0)$ 的图象有唯一交点，$\therefore e^{x_0}=\frac{a}{x_0-1}, x_0>1$，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 有较小值点 x_0，即此时函数 $f(x)$ 的极值点个数为 1；

综上所述：

当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 的极值点个数为 0；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的极值点个数为 1.

(2) 证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(1,1+e^{-a})$ 上不单调，$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,1+e^{-a})$ 为函数 $f(x)$ 的极值点，

由（1）可知，$a>0$，且 $f(1+e^{-a})=\dfrac{e^{-a}\,e^{1+e^{-a}}-a}{e^{-a}}>0$，即 $e^{1-a+e^{-a}}>a$，

取对数 $1-a+e^{-a}>\ln a$，即 $1+e^{-a}-\ln a>a$，要证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}>a$，即证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}>1+e^{-a}-\ln a$，

又知 $e^x\ge 1+x$，$\therefore e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}\le\dfrac{1}{a+1}$，即 $\dfrac{1}{a+1}\ge e^{-a}$，又 $e^{\frac{1}{a}-1}\ge\dfrac{1}{a}$，$\therefore e^{1-\frac{1}{a}}\le a$，

$\therefore 1-\dfrac{1}{a}\le\ln a$，即 $\dfrac{1}{a}\ge 1-\ln a$，$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}\ge 1+e^{-a}-\ln a$，

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}>a$. 证毕.

4.构造函数

例 1： 已知函数 $f(x)=\ln x-mx^2-x$.

（Ⅰ）若 $x=\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，求 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）若 $\forall x_1,x_2\in\left[\dfrac{1}{e},e\right]$，$x_1\ne x_2$，都有 $x_2f(x_1)-x_1f(x_2)>x_1x_2(x_2-x_1)$，求 m 的范围.

解：由题意得

（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2mx-1(x>0)$，由题 $f'(\dfrac{1}{2})=0\Rightarrow 2-m-1=0\Rightarrow m=1$，经检验，成立

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x-1=\dfrac{1-2x^2-x}{x}=-\dfrac{(2x-1)(x+1)}{x}(x>0)$

令 $f'(x)>0\Rightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$，$f(x)$ 递增；

令 $f'(x)<0\Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$，$f(x)$ 递减；

$\therefore f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{2})=-\ln 2-\dfrac{3}{4}$

（II）$x_2f(x_1)-x_1f(x_2)>x_1x_2(x_2-x_1)\Rightarrow\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}>(x_2-x_1)\Rightarrow\frac{f(x_1)}{x_1}+x_1>\frac{f(x_2)}{x_2}+x_2$

构造 $g(x)=\frac{f(x)}{x}+x=\frac{\ln x-mx^2-x}{x}+x=\frac{\ln x}{x}-mx-1+x$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-m+1$

当 $x_1>x_2$ 时，$g(x)$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 递增 $\Rightarrow g'(x)\geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow m\leq\left(\frac{1-\ln x}{x^2}+1\right)_{\min}$

令 $h(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1, x\in[\frac{1}{e},e]$，$h'(x)=\frac{(-\frac{1}{x})\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}<0$ 恒成立

$\therefore h(x)$ 递减，$\therefore h(x)_{\min}=h(e)=1\Rightarrow m\leq 1$

当 $x_1<x_2$ 时，$g(x)$ 在 $[\frac{1}{e},e]$ 递减 $\Rightarrow g'(x)\leq 0$ 恒成立 $\Rightarrow m\geq\left(\frac{1-\ln x}{x^2}+1\right)_{\max}$

令 $h(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1, x\in[\frac{1}{e},e]$，$h'(x)=\frac{(-\frac{1}{x})\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}<0$ 恒成立

$\therefore h(x)$ 递减，$\therefore h(x)_{\max}=h(\frac{1}{e})=2e^2+1\Rightarrow m\geq 2e^2+1$

综上所述：实数 m 的取值范围为 $(-\infty,1]\cup[2e^2+1)$

例 2： 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(m+1)x+m\ln x$，$m\in R$，$g(x)=\frac{e^x}{x}$.

（Ⅰ）求 $g(x)$ 的极值；

（II）若对任意的 $x_1,x_2\in[2,4](x_1\neq x_2)$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<|g(x_1)-g(x_2)|$ 恒成立，求实数 m 的最大值；

（III）若函数 $f(x)$ 恰有两个不相等的零点，求实数 m 的取值范围.

解：由题意得

(1) $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}(x>0)$

令 $g'(x)>0\Rightarrow x>1$，$g(x)$ 递增；

令 $g'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$，$g(x)$ 递减，

$\because g(1)=1$，$\therefore y=g(x)$ 的极小值为 e，无极大值.

(2) $\because x_2>x_1$，由 (1) 可知 $f(x_1)-f(x_2)<|g(x_1)-g(x_2)|$

等价于 $f(x_1)-f(x_2)<g(x_2)-g(x_1)$，即 $f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)$.

设 $h(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{2}x^2+m\ln x-(m+1)x+\frac{e^x}{x}$，则 $h(x)$ 在 $[2,4]$ 为增函数.

$h'(x)=x-(m+1)+\frac{m}{x}+\frac{e^x(x-1)}{x^2}=\frac{x-1}{x}\left(x-m+\frac{e^x}{x}\right)\geq 0$ 在 $[2,4]$ 恒成立.

故 $m\leq x+\frac{e^x}{x}$ 恒成立. 设 $v(x)=x+\frac{e^x}{x}$，

又 $v'(x)=1+\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$ 在 $[2,4]$ 上恒成立，$\therefore v(x)$ 为增函数.

$v(x)$ 在 $[2,4]$ 上的最小值为 $v(2)=2+\frac{e^2}{2}$.

$\therefore m\leq 2+\frac{e^2}{2}$，$\therefore m$ 的最大值为 $2+\frac{e^2}{2}$.

(3) $f'(x)=x-(m+1)+\frac{m}{x}=\frac{(x-1)(x-m)}{x}$

当 $0<m<1$ 时，当 $x\in(0,m)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

当 $x\in(m,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(m)=\frac{1}{2}m^2-(m+1)m+m\ln m=-\frac{m^2}{2}-m+m\ln m<0$

所以函数 $f(x)$ 至多一个零点

当 $m=1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $m>1$ 时，当 $x\in(0,m)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

当 $x\in(m,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{1}{2}-(m-1)=-m-\frac{1}{2}<0$

$f(x)$ 的极小值为 $f(m)<f(1)<0$

所以函数 $f(x)$ 至多有一个零点.

当 $m\leq 0$ 时，当 $x\in(0,1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递增

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递减

所以 $f(1)_{\min}=\frac{1}{2}-(m-1)=-m-\frac{1}{2}$

当 $f(1)_{\min}=-m-\frac{1}{2}\geq 0$ 时，即 $m\leq -\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 至多一个零点.

当 $-\frac{1}{2}<m<0$ 时，$f(-m)=m\left(\frac{3m}{2}+1+\ln(-m)\right)>0$，所以存在 $x_1\in(-m,1)$，$f(x_1)=0$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一的零点.

又 $f(e^2)=e^2\left(\frac{e^2}{2}-1\right)+(2-e^2)m>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一的零点.

综上所述：实数 m 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

例 3： 设 $f(x)=a\ln x+bx-b$，$g(x)=\frac{ex}{e^x}$，其中 a，$b\in R$.

（Ⅰ）设 $b=1$，$a>0$，若 $|f(x_2)-f(x_1)|<\left|\frac{1}{g(x_2)}-\frac{1}{g(x_1)}\right|$ 对任意的 x_1，$x_2\in[3,4](x_1\neq x_2)$ 恒成立，求 a 的最大值；

（Ⅱ）设 $a=-2$，若对任意的 $x_0\in(0,e]$，在区间 $(0,e]$ 上总存在 $s,t(s\neq t)$，使 $f(s)=f(t)=g(x_0)$ 成立，求 b 的取值范围.

解：由题意得

（Ⅰ）$f(x)=a\ln x+x-1$，$x>0$，$f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{a+x}{x}>0$ 在 $[3,4]$ 恒成立，$f(x)$ 在 $[3,4]$ 递增；

设 $h(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{e^x}{ex}$，$h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{ex^2}>0$ 在 $[3,4]$ 恒成立，$h(x)$ 在 $[3,4]$ 递增.

设 $x_1<x_2$，原不等式等价为 $f(x_2)-f(x_1)<h(x_2)-h(x_1)$，

即 $f(x_2)-h(x_2)<f(x_1)-h(x_1)$，构造 $F(x)=f(x)-h(x)$，$F(x)$ 在 $[3,4]$ 递减，

又 $F(x)=a\ln x+x-1-\frac{e^x}{ex}$，$F'(x)=\frac{a}{x}+1-\frac{e^x(x-1)}{ex^2}\le 0$ 在 $[3,4]$ 恒成立，

故 $h(x)$ 在 $[3,4]$ 递增，$a\le\frac{1}{e}\cdot\frac{e^x(x-1)}{x}-x$，令 $G(x)=\frac{1}{e}\cdot\frac{e^x(x-1)}{x}-x$，$3\le x\le 4$，

$\therefore G'(x)=\frac{1}{e}\cdot\frac{e^x\cdot(x^2-x+1)}{x^2}-1=e^{x-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)-1=e^{x-1}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]-1>\frac{3}{4}e^2-1>0$，

所以 $G(x)$ 在 $[3,4]$ 递增，即 $a\le\frac{2}{3}e^2-3$，即 $a_{max}=\frac{2}{3}e^2-3$；

（Ⅱ）$g'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,e]$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减. 又 $g(0)=0$，$g(1)=1$，$g(e)=e^{2-e}>0$，

所以，函数 $g(x)$ 在 $(0,e]$ 上的值域为 $(0,1]$.

由题意，当 $f(x)$ 取 $(0,1]$ 的每一个值时，在区间 $(0,e]$ 上存在 t_1，$t_2(t_1\ne t_2)$ 与该值对应.

$a=-2$ 时，$f(x)=b(x-1)-2\ln x$，$f'(x)=b-\frac{2}{x}=\frac{bx-2}{x}$，

当 $b=0$ 时，$f'(x)=-\frac{2}{x}<0$，$f(x)$ 单调递减，不合题意，

当 $b\ne 0$ 时，$x=\frac{2}{b}$ 时，$f'(x)=0$，

由题意，$f(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上不单调，所以，$0<\frac{2}{b}<e$，

当 $x\in\left(0,\frac{2}{b}\right]$ 时，$f'(x)<0$，当 $\left(\frac{2}{b},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)_{min}=f\left(\frac{2}{b}\right)=2-a-2\ln\frac{2}{b}$，

由题只需满足 $\begin{cases}f\left(\frac{2}{b}\right)<0\\ f(e)\ge 1\\ \exists x_0\in\left(0,\frac{2}{b}\right),f(x_0)>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\frac{2}{b}<e\\ b\ge\frac{3}{e-1}\end{cases}\Rightarrow b\ge\frac{3}{e-1}$

故实数 b 的取值范围为 $\left[\frac{3}{e-1},+\infty\right)$.

例 4： 已知函数 $f(x)=(x+1)\sin x+\cos x$

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若对于任意的 x_1，$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right](x_1\neq x_2)$，均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<a|e^{x_1}-e^{x_2}|$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解：由题意得

（Ⅰ）$f(0)=1$，$f'(x)=\sin x+(x+1)\cos x-\sin x=(x+1)\cos x$，$f'(0)=1$，

$\therefore$ 切线方程为 $y=x+1$，即 $x-y+1=0$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f'(x)=(x+1)\cos x$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增，

不妨设 x_1，$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 且 $x_1>x_2$，$e^{x_1}>e^{x_2}$，即 $f(x_1)-f(x_2)<ae^{x_1}-ae^{x_2}$，

$\therefore f(x_1)-ae^{x_1}<f(x_2)-ae^{x_2}$.

令 $F(x)=f(x)-ae^x$，则 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

$\therefore F'(x)=(x+1)\cos x-ae^x\leq 0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，即 $a\geq\frac{(x+1)\cos x}{e^x}$ 恒成立，

令 $Q(x)=\frac{(x+1)\cos x}{e^x}$，$Q'(x)=\frac{\cos x-(x+1)\sin x-(x+1)\cos x}{e^x}=\frac{-x\cos x-(x+1)\sin x}{e^x}$.

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore\sin x\geq 0$，$\cos x\geq 0$，$\therefore Q'(x)\leq 0$，$\therefore Q(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

$\therefore Q(x)_{\max}=Q(0)=1$. $\therefore a\geq 1$，

综上所述：实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

例 5： 已知函数 $f(x)=ax-\ln x$，若 $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right]$，求证：$f(x)\geq 2ax-xe^{ax-1}$.

解：由题意得

令 $g(x)=f(x)-2ax+xe^{ax-1}=xe^{ax-1}-ax-\ln x$，

则 $g'(x)=e^{ax-1}+axe^{ax-1}-a-\frac{1}{x}=(ax+1)\left(e^{ax-1}-\frac{1}{x}\right)=\frac{(ax+1)\left(xe^{ax-1}-1\right)}{x}$，

设 $r(x)=xe^{ax-1}-1$，则 $r'(x)=(1+ax)e^{ax-1}$，$\because e^{ax-1}>0$，

当 $x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 时，$r'(x)>0$，$r(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$r'(x)<0$，$r(x)$ 单调递减.

$\therefore r(x)_{\max}=r\left(-\frac{1}{a}\right)=-\left(\frac{1}{ae^2}+1\right)\leq 0$（因为 $a\leq-\frac{1}{e^2}$），$\therefore e^{ax-1}-\frac{1}{x}\leq 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore g(x)_{\min}=g\left(-\frac{1}{a}\right)$，

设 $t=-\frac{1}{a}\in\left(0,e^2\right]$，则 $g\left(-\frac{1}{a}\right)=h(t)=\frac{t}{e^2}-\ln t+1(0<t\leq e^2)$，$h'(t)=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{t}\leq 0$，

$h(t)$ 在 $\left(0,e^2\right]$ 上递减，$\therefore h(t)\geq h\left(e^2\right)=0$；$\therefore g(x)\geq 0$，故 $f(x)\geq 2ax-xe^{ax-1}$.

5.隐零点问题（卡根思想）

例 1： 函数 $f(x)=2e^x-x^3e^x$

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ)设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}+x^3+x(\ln x+1)-2$，当 $x>1$ 时，$g(x)>k(x-1)$ 恒成立，求整数 k 的最大值.

解：由题意得

(Ⅰ) $f'(x)=2e^x-(3x^2e^x+x^3e^x)=-e^x(x^3+3x^2-2)=-e^x(x+1)(x^2+2x-2)$

$\Rightarrow f'(x)=-e^x(x+1)\left[x+(1+\sqrt{3})\right]\left[x-(-1+\sqrt{3})\right](x\in R)$

令 $f'(x)>0\Rightarrow x<-1-\sqrt{3}$ 或 $-1<x<\sqrt{3}-1$，$f(x)$ 递增；

令 $f'(x)<0\Rightarrow -1-\sqrt{3}<x<-1$ 或 $x>\sqrt{3}-1$，$f(x)$ 递减；

综上：$f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1-\sqrt{3})$，$(-1,\sqrt{3}-1)$，

减区间为 $(-1-\sqrt{3},-1)$，$(\sqrt{3}-1,+\infty)$.

(Ⅱ) $g(x)=\dfrac{2e^x-x^3e^x}{e^x}+x^3+x(\ln x+1)-2=x(\ln x+1)>k(x-1)\Rightarrow k<\left(\dfrac{x(\ln x+1)}{x-1}\right)_{\min}$

设 $h(x)=\dfrac{x(\ln x+1)}{x-1}(x>1)$，即 $h'(x)=\dfrac{(2+\ln x)(x-1)-x(\ln x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$

设 $\varphi(x)=x-2-\ln x\Rightarrow\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$ 恒成立 $\Rightarrow\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增

此时 $\varphi(3)=1-\ln 3<0$，$\varphi(4)=2-\ln 4>0$

$\because\varphi(3)\cdot\varphi(4)<0$，$\therefore\exists x_0\in(3,4)$，使得 $\varphi(x_0)=0$ 成立，即 $x_0-2-\ln x_0=0$

即 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{x_0(\ln x_0+1)}{x_0-1}=\dfrac{x_0(x_0-2+1)}{x_0-1}=x_0\in(3,4)$

$\therefore k<x_0$，$\because k\in Z$，$\therefore k_{\max}=3$

综上所述：整数 k 的最大值为 3

例 2： 已知函数 $f(x)=ae^x-2x$，$a\in R$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值；

(2) 当 $a\geq 1$ 时，证明：$f(x)-\ln x+2x>2$.

解：由题意得

（1）$f'(x)=ae^x-2$，

当 $a\le 0$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 R 单调递减，则 $f(x)$ 无极值.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln\frac{2}{a}$，$f'(x)>0$ 得 $x>\ln\frac{2}{a}$，$f'(x)<0$ 得 $x<\ln\frac{2}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减，$\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$ 单调递增，

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f\left(\ln\frac{2}{a}\right)=2-2\ln\frac{2}{a}$，无极大值，

综上：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 无极值.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f\left(\ln\frac{2}{a}\right)=2-2\ln\frac{2}{a}$，无极大值；

（2）当 $a\ge 1$ 时，$f(x)-\ln x+2x\ge e^x-\ln x$，令 $g(x)=e^x-\ln x-2$，转化证明 $g(x)>0$

$\because g'(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$，$g''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，

因为 $g'(1)=e-1>0$，$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，所以 $\exists x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $g'(x)=0$

因此函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单减函数，在 $(x_0,+\infty)$ 上单增函数，

所以 $g(x)\ge g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2\ge 2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$，$\because x_0\ne 1\therefore g(x)>0$

因此 $f(x)-\ln x+2x>2$，证毕

例 3： 设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

（I）讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点的个数；

（II）证明：当 $a>0$ 时 $f(x)\ge 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

解：由题意得

（I）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$ 没有零点；

当 $a>0$ 时，显然 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增. 又 $f'(a)>0$，当 b 满足 $0<b<\frac{a}{4}$ 且 $b<\frac{1}{4}$ 时，$f(b)<0$，故当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 存在唯一零点.

（II）由（I），可设 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的唯一零点为 x_0，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，

所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.

由于 $2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$，所以 $f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

例 4： 设函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x-1}$，$(a>0)$

(1) 当 $a=\frac{1}{30}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a\geq\frac{1}{2}$，$x\in(1,+\infty)$ 时，求证：$\ln x+\frac{a}{x-1}>1$.

解：由题意得

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，当 $a=\frac{1}{30}$ 时，$f'(x)=\frac{\left(x-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{6}{5}\right)}{x(x-1)^2}$，

令 $f'(x)>0\Rightarrow x>\frac{6}{5}$ 或 $x<\frac{5}{6}$，所以函数单调增区间为 $\left(0,\frac{5}{6}\right)$，$\left(\frac{6}{5},+\infty\right)$.

令 $f'(x)<0\Rightarrow\frac{5}{6}<x<\frac{6}{5}$，所以函数单调减区间为 $\left(\frac{5}{6},1\right)$，$\left(1,\frac{6}{5}\right)$.

(2) 要证 $\ln x+\frac{a}{x-1}>1$ 成立，只需证 $\ln x+\frac{a}{x-1}\geq\ln x+\frac{1}{2(x-1)}>1$，$\left(a\geq\frac{1}{2},x>1\right)$

即证 $2(x-1)\ln x+1>2(x-1)$ 当 $x>1$ 时成立. 设 $g(x)=2(x-1)\ln x-2(x-1)+1(x>1)$.

$\therefore g'(x)=2\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$，显然 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内是增函数，

且 $g'(1)=-2<0$，$g'(2)=2\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)>0$，

$\therefore g'(x)=0$ 在 $(1,2)$ 内有唯一零点 x_0，使得 $\ln x_0-\frac{1}{x_0}=0$，

且当 $x\in(1,x_0)$，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$，$g'(x)>0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增.

$g(x)_{\min}=g(x_0)=2(x_0-1)(\ln x_0-1)+1=2(x_0-1)\left(\frac{1}{x_0}-1\right)+1=5-2\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，

$\because x_0\in(1,2)$，$\therefore 2<x_0+\frac{1}{x_0}<\frac{5}{2}$. $\therefore g(x)_{\min}>0$，$\therefore\ln x+\frac{a}{x-1}>1$ 成立，证毕

6.极值点减元问题（减元思想）

例 1： 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x(a>0)$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>\frac{-3-2\ln 2}{4}$.

解：由题意得

（Ⅰ）$f'(x)=x-1+\frac{a}{x}=\frac{x^2-x+a}{x}(x>0)$，记 $\Delta=1-4a$

当 $\Delta\le 0\Rightarrow a\ge\frac{1}{4}$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增

当 $\Delta>0\Rightarrow 0<a<\frac{1}{4}$ 时，记 $x^2-x+a=0$ 的两根为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$

当 $a>0$ 时，显然 $0<x_1<x_2$

令 $f'(x)>0\Rightarrow x>x_2$ 或 $0<x<x_1$

令 $f'(x)<0\Rightarrow x_1<x<x_2$

综上：当 $a\ge\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2})$，$(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$，

单调递减区间为 $(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$

（Ⅱ）当 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2 时，由（Ⅰ）知 $0<a<\frac{1}{4}$，且 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=a\end{cases}$

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2-x_1+a\ln x_1+\frac{1}{2}x_2^2-x_2+a\ln x_2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-x_1x_2-(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)$

$\Rightarrow f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}-a-1+a\ln a=a\ln a-a-\frac{1}{2}$，构造 $g(x)=x\ln x-x-\frac{1}{2}(0<x<\frac{1}{4})$

$g'(x)=1+\ln x-1=\ln x<0$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上恒成立 $\Rightarrow g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 上单调递减

$\therefore g(x)>g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-3-2\ln 2}{4}\Rightarrow f(x_1)+f(x_2)>\frac{-3-2\ln 2}{4}$，证毕

例 2： 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-ae^x+ax$ 有两个极值点.

（1）求 a 的取值范围；

（2）设 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1，x_2，若不等式 $f(x_1)+f(x_2)<\lambda(e^{x_1}+e^{x_2})$ 恒成立，求 λ 的最小值.

解：由题意得

(1) $f'(x)=e^{2x}-ae^{x}+a$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，设 $t=e^{x}>0$

即方程 $t^2-at+a=0$ 有两个不同的正根，所以 $\begin{cases}a^2-4a>0,\\ \frac{a}{2}>0,\\ a>0,\end{cases}$，所以 $a>4$.

(2) 由（1）知 x_1，x_2 是 $f'(x)=e^{2x}-ae^{x}+a$ 的两个根，

由根与系数的关系得 $e^{x_1}+e^{x_2}=a$，$e^{x_1}\cdot e^{x_2}=a$，所以 $x_1+x_2=\ln a$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}\left(e^{2x_1}+e^{2x_2}\right)-a\left(e^{x_1}\cdot e^{x_2}\right)+a(x_1+x_2)$

$=\frac{1}{2}\left(e^{x_1}+e^{x_2}\right)^2-\left(e^{x_1}e^{x_2}\right)-a\left(e^{x_1}+e^{x_2}\right)+a(x_1+x_2)<\lambda\left(e^{x_1}+e^{x_2}\right)$，即 $\frac{1}{2}a^2-a-a^2+a\ln a<\lambda a$.

因为 $a>4$，所以 $\ln a-1-\frac{1}{2}a<\lambda$. 设 $g(a)=\ln a-1-\frac{1}{2}a$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}<0$，

所以 $g(a)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(a)<g(4)=2\ln 2-3$，

故 λ 的最小值为 $2\ln 2-3$.

例 3： 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x(1-ax)-\ln x(a\in R)$.

(1) 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1>x_2$，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{4}-4a$.

解：由题意得

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\ln x$，

$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}=\frac{x^2+x-2}{2x}=\frac{(x+2)(x-1)}{2x}$. 令 $f'(x)=0$，则 $x=1$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，单调减区间为 $(0,1)$.

(2) $f'(x)=\frac{1}{2}-ax-\frac{1}{x}=-\frac{2ax^2-x+2}{2x}$.

$f(x)$ 存在两个极值点，即 x_1，x_2 是方程 $2ax^2-x+2=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同实根.

且 $x_1+x_2=\frac{1}{2a}$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$，所以 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=1-16a>0\end{cases}$，所以 $0<a<\frac{1}{16}$.

又 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{2}(x_1-x_2)-\frac{1}{2}a\left(x_1^2-x_2^2\right)-\left(\ln x_1-\ln x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}-\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

要证 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{4}-4a$，即证 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>4a=\frac{2}{x_1+x_2}$，即证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$.

令 $\frac{x_1}{x_2}=t>1$，只需证 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，令 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$g(1)=0$，

所以 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)}\geq 0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $t>1$，所以 $g(t)>g(1)$，即 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$.

所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{4}-4a$. 证毕.

例 4： 设函数 $f(x)=x^2-ax+\ln x$.

（1）若当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极值，求 a 的值，并求 $f(x)$ 的单调区间.

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，求 a 的取值范围，并证明：$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{4}{a}-\frac{a}{2}$.

解：由题意得

（1）$f'(x)=2x-a+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-ax+1}{x}(x>0)$ ∵ $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极值. ∴ $f'(1)=0, a=3$.

$\therefore f'(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$

令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$ 得 $\frac{1}{2}<x<1$

∴ $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right),(1,+\infty)$，单调减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

（2）$f'(x)=\frac{2x^2-ax+1}{x},(x>0)$，即方程 $2x^2-ax+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根.

$\Delta=a^2-8>0, x_1x_2=\frac{1}{2}>0$，$x_1+x_2=\frac{a}{2}>0$ ∴ $a>2\sqrt{2}$.

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2-ax_2+\ln x_2-x_1^2+ax_1-\ln x_1}{x_2-x_1}=x_2+x_1-a+\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=-\frac{a}{2}+\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$

要证 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{4}{a}-\frac{a}{2}$，即证 $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}>\frac{4}{a}$，即证 $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_2+x_1}$

不妨设 $x_2>x_1>0$，即证 $\ln\frac{x_2}{x_1}>2\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\frac{x_2}{x_1}+1}$，令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，$h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$

$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增. $\therefore h(t)>h(1)=0$

综上：$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{4}{a}-\frac{a}{2}$ 成立.

例5： 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2-bx(a,b\in R)$.

(1) 当 $a=-1$ 时，设 x_1，x_2 为 $f(x)$ 的两个不同极值点，证明：$f(x_1)+f(x_2)<-3-\ln 2$；

(2) 设 x_1，x_2 为 $f(x)$ 的两个不同零点，证明：$f(x_1+x_2)<x_1+x_2-3$.

解：由题意得

(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\ln x+x^2-bx$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+2x-b=\frac{2x^2-bx+1}{x}(x>0)$，

$\because x_1,x_2$ 为 $f(x)$ 的两个不同极值点，$\therefore x_1,x_2$ 为方程 $2x^2-bx+1=0$ 的两不等正根，

$\therefore bx_1=2x_1^2+1, bx_2=2x_2^2+1$，且由韦达定理 $x_1x_2=\frac{1}{2}$，

$f(x_1)+f(x_2)=(\ln x_1+x_1^2-bx_1)+(\ln x_2+x_2^2-bx_2)=\ln x_1x_2-x_1^2-x_2^2-2$

$<\ln x_1x_2-2x_1x_2-2=-\ln 2-3$，$\therefore f(x_1)+f(x_2)<-3-\ln 2$.

(2) 要证 $f(x_1+x_2)<x_1+x_2-3$，即证 $\ln(x_1+x_2)-a(x_1+x_2)^2-b(x_1+x_2)<x_1+x_2-3$，

下面分别证明 $\ln(x_1+x_2)\le x_1+x_2-1$ 和 $-a(x_1+x_2)^2-b(x_1+x_2)<-2$.

(i) $\ln(x_1+x_2)\le x_1+x_2-1$，令 $t=x_1+x_2>0$，即证 $\ln t-t+1\le 0$.

令 $g(t)=\ln t-t+1$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$，$\therefore g(t)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，

$\therefore g(t)\le g(1)=0$.

(ii) 再证明 $-a(x_1+x_2)^2-b(x_1+x_2)<-2$，即 $a(x_1+x_2)^2+b(x_1+x_2)>2$.

不妨设 $0<x_1<x_2$，$\therefore \ln x_1=ax_1^2+bx_1$① $\quad \ln x_2=ax_2^2+bx_2$②

①-②可得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+b(x_1-x_2)$，两边同时乘以 $\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$，

得 $\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}\cdot(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)}=a(x_1+x_2)^2+b(x_1+x_2)\Rightarrow a(x_1+x_2)^2+b(x_1+x_2)=\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\cdot\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}$.

令 $m=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则 $a(x_1+x_2)^2+b(x_1+x_2)=\frac{(m+1)\cdot\ln m}{m-1}$. 即证 $\frac{(m+1)\cdot\ln m}{m-1}>2$，

即 $\ln m<\frac{2(m-1)}{m+1}=2-\frac{4}{m+1}$，即证 $\ln m+\frac{4}{m+1}-2<0$. 令 $h(m)=\ln m+\frac{4}{m+1}-2$，

则 $h'(m)=\frac{1}{m}-\frac{4}{(m+1)^2}=\frac{(m-1)^2}{m(m+1)^2}>0$，$\therefore h(m)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，$\therefore h(m)<h(1)=0$.

由（i）（ii）可得 $\ln(x_1+x_2)-a(x_1+x_2)^2-b(x_1+x_2)<x_1+x_2-3$，

$\therefore f(x_1+x_2)<x_1+x_2-3$. 证毕.

例 6： 已知函数 $f(x)=x^2+2(a-3)x+2a\ln x$，其中 $a\in R$.

（1）函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x-2y+1=0$ 垂直，求实数 a 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$.

①求实数 a 的取值范围；

②求证：$f(x_1)+f(x_2)+10>0$.

解：由题意得

（I）$f'(x)=2x+2(a-3)+\dfrac{2a}{x}$，所以 $f'(1)=4a-4$，$(4a-4)\cdot\dfrac{1}{2}=-1$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

（II）① $f'(x)=2x+2(a-3)+\dfrac{2a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个根 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，

即 $2x^2+2(a-3)x+2a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不相等的根 x_1,x_2.

所以 $\begin{cases}-\dfrac{2(a-3)}{2\times 2}>0,\\ \Delta=4(a-3)^2-16>0,\text{解得}0<a<1.\\ 2a>0,\end{cases}$

当 $0<a<1$ 时，

若 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增；

若 $x_1<x<x_2$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递减，

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$.

所以，实数 a 的取值范围是 $0<a<1$.

②由①可知，$x_1,x_2\,(0<x_1<x_2)$ 是方程 $2x^2+2(a-3)x+2a=0$ 的两个不等的实根，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=3-a,\\ x_1x_2=a,\end{cases}$ 其中 $0<a<1$.

故 $f(x_1)+f(x_2)=x_1^2+2(a-3)x_1+2a\ln x_1+x_2^2+2(a-3)x_2+2a\ln x_2$

$=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2(a-3)(x_1+x_2)+2a\ln x_1x_2$

$=(3-a)^2-2a+2(a-3)(3-a)+2a\ln a=2a\ln a-a^2+4a-9$，

令 $g(a)=2a\ln a-a^2+4a-9$，其中 $0<a<1$. 故 $g'(a)=2\ln a-2a+6$，

令 $h(a)=g'(a)=2\ln a-2a+6$，$h'(a)=\dfrac{2}{a}-2>0$，$h(a)=g'(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

由于 $h(e^{-3})=-2e^{-3}<0$，$h(1)=4>0$，所以存在常数 $t\in(e^{-3},1)$，使得 $h(t)=0$，

即 $\ln t-t+3=0$，$\ln t=t-3$，

当 $a\in(0,t)$ 时，$h(a)=g'(a)<0$，$g(a)$ 在 $(0,t)$ 上单调递减；

当 $a\in(t,1)$ 时，$h(a)=g'(a)>0$，$g(a)$ 在 $(t,1)$ 上单调递增，

所以当 $0<a<1$ 时，$g(a)\geqslant g(t)=2t\ln t-t^2+4t-9=2t(t-3)-t^2+4t-9=t^2-2t-9$，

又 $t\in(e^{-3},1)$，$t^2-2t-9=(t-1)^2-10>-10$，所以 $g(a)>-10$，即 $g(a)+10>0$，

故 $f(x_1)+f(x_2)+10>0$ 证毕.

例 7： 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2-2x+\frac{3}{2}\ (a\geq 0)$.

(Ⅰ)讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)<0$.

解：由题意得

(Ⅰ) $f'(x)=\frac{1}{x}+ax-2=\frac{ax^2-2x+1}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{-2x+1}{x}$.

令 $f'(x)>0\Rightarrow x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增；

令 $f'(x)<0\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

即函数 $f(x)$ 只有一个极大值点 $\frac{1}{2}$，无极小值点.

当 $0<a<1$ 时，$\Delta=4-4a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-a}}{a}$.

令 $f'(x)>0\Rightarrow x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a},+\infty\right)$，$f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0\Rightarrow x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-a}}{a},\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}\right)$，$f(x)$ 单调递减.

即函数 $f(x)$ 有一个极大值点 $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$，有一个极小值点 $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$.

当 $a\geq 1$ 时，$\Delta=4-4a\leq 0$，此时 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，即 $f(x)$ 单调递增，无极值点.

综上：当 $a=0$ 时，$f(x)$ 有且仅有一个极大值点，即只有 1 个极值点；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有一个极大值点和一个极小值点，即有 2 个极值点；

当 $a\geq 1$ 时，$f(x)$ 没有极值点.

(Ⅱ)由 (1) 可知，当且仅当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，

且 x_1，x_2 为方程 $ax^2-2x+1=0$ 的两根，即 $x_1+x_2=\frac{2}{a}$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1x_2+\frac{a}{2}(x_1^2+x_2^2)-2(x_1+x_2)+3=\ln\frac{1}{a}+\frac{a}{2}\left(\frac{4}{a^2}-\frac{2}{a}\right)-\frac{4}{a}+3$

$=-\ln a-\frac{2}{a}+2$. 令 $g(a)=-\ln a-\frac{2}{a}+2,\ a\in(0,1)$，则 $g'(a)=-\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}=\frac{2-a}{a^2}>0$ 恒成立，

所以 $g(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $g(a)<g(1)=-\ln 1-2+2=0$，

即 $f(x_1)+f(x_2)<0$. 证毕.

例 8： 已知函数 $f(x)=2\ln x+x^2+x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程.

（2）若正实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)=4$，求证：$x_1+x_2\geq 2$.

解：由题意得

（1）$f(1)=2\ln 1+1^2+1=2$，切点为 $(1,2)$. $f'(x)=\dfrac{2}{x}+2x+1$，$k=f'(1)=5$.

所求切线方程为：$y-2=5(x-1)$，即 $5x-y-3=0$.

（2）$f(x_1)+f(x_2)=2\ln x_1+x_1^2+x_1+2\ln x_2+x_2^2+x_2=4$

即 $2\ln x_1+x_1^2+x_1+2\ln x_2+x_2^2+x_2=4\Rightarrow (x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=4+2(x_1x_2-\ln x_1x_2)$

设 $x_1x_2=t$，$g(t)=t-\ln t$，$t>0$，$g'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$，，

令 $g'(t)>0\Rightarrow t\in(1,+\infty)$，$g(t)$ 为增函数；

令 $g'(t)<0\Rightarrow t\in(0,1)$，$g(t)$ 为减函数，所以 $g_{\min}(t)=g(1)=1$，所以 $g(t)\geq 1$.

即 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geq 4+2=6$. 得 $(x_1+x_2+3)(x_1+x_2-2)\geq 0$，

即 $x_1+x_2-2\geq 0\Rightarrow x_1+x_2\geq 2$. 证毕

例 9： 已知函数 $f(x)=x\ln x-1$，$g(x)=ax^2-(a-2)x$.

（1）设函数 $H(x)=f'(x)-g(x)$，讨论 $H(x)$ 的单调性；

（2）设函数 $G(x)=g(x)+(a-2)x$，若 $f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两个不同的交点，证明：$\ln(x_1x_2)>2+\ln 2$.

解：由题意得

（1）$H(x)=f'(x)-g(x)=\ln x+ax^2+(a-2)x+1$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$H'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(a-2)=\dfrac{-2ax^2+(a-2)x+1}{x}=\dfrac{(-2x+1)(ax+1)}{x}$.

当 $a\geq 0$ 时，$H(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

当 $-2<a<0$ 时，令 $H'(x)>0$，得 $x\in\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$H(x)$ 单调递增；

令 $H'(x)<0$，得 $x\in\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{a}\right)$，$H(x)$ 单调递减.

当 $a=-2$ 时，$H'(x)\geq 0$，$H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a<-2$ 时，令 $H'(x)>0$，得 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\cup\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$，所以 $H(x)$ 单调递增；

令 $H'(x)<0$，得 $x\in\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $H(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减.

（2）$G(x)=g(x)+(a-2)x=ax^2$，因为 $f(x)$ 的图象与 $G(x)$ 的图象有两个不同的交点，

所以关于 x 的方程 $ax^2=x\ln x-1$，即 $ax=\ln x-\frac{1}{x}$ 有两个不同的根.

由题知 $\ln x_1-\frac{1}{x_1}=ax_1$①，$\ln x_2-\frac{1}{x_2}=ax_2$②，

①+②得 $\ln(x_1x_2)-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=a(x_1+x_2)$③，

②-①得 $\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=a(x_2-x_1)$④.

由③，④得 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$，不妨设 $0<x_1<x_2$，记 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$.

令 $F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $F'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)}>0$，

所以 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t)>F(1)=0$，

则 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，即 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$，所以 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}>2$.

因为 $\ln(x_1x_2)-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}<\ln(x_1x_2)-\frac{4\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}=\ln(x_1x_2)-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}=2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$.

所以 $2\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}>2$，即 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1$.

令 $\phi(x)=\ln x-\frac{2}{x}$，则 $\phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\ln(\sqrt{2}e)-\frac{2}{\sqrt{2}e}=\frac{1}{2}\ln 2+1-\frac{\sqrt{2}}{e}<1$，所以 $\ln\sqrt{x_1x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>1>\ln(\sqrt{2}e)-\frac{2}{\sqrt{2}e}$，

即 $\phi(\sqrt{x_1x_2})>\phi(\sqrt{2}e)$，所以 $x_1x_2>2e^2$. 两边同时取对数可得 $\ln(x_1x_2)>2+\ln 2$，得证.

例 10： 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-x+2a^2\ln x(a\neq 0)$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性.

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

解：由题意得

（1）解：$f'(x)=ax-1+\frac{2a^2}{x}=\frac{ax^2-x+2a^2}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

设 $p(x)=ax^2-x+2a^2(x>0)$，$\Delta=1-8a^3$

当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，$\Delta\leq 0$，$p(x)\geq 0$，则 $f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\Delta>0$，$p(x)$ 的零点为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}\right)$，$\left(\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增

$f(x)$ 在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a}\right)$ 上单调递减

当 $a<0$ 时，$\Delta>0$，$p(x)$ 的零点为 $\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减.

（2）证明：由（1）知，当 $0<a<\frac{1}{2}$，$f(x)$ 存在两个极值点，不妨设 $0<x_1<x_2$，则 $x_1+x_2=\frac{1}{a}$

要证 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，只需证 $f(x_1)-f(x_2)>\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$

即证 $\frac{1}{2}(x_1-x_2)\left[a(x_1+x_2)-2\right]+2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{2}(x_1-x_2)+2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$

即证 $2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$，设 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，

设函数 $g(t)=2a^2\ln t-t+\frac{1}{t}$，$g'(t)=-\frac{t^2-2a^2t+1}{t^2}$，$\Delta'=4a^4-4<0$，所以 $t^2-2a^2t+1>0$，

$g'(t)<0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则 $g(t)>g(1)=0$

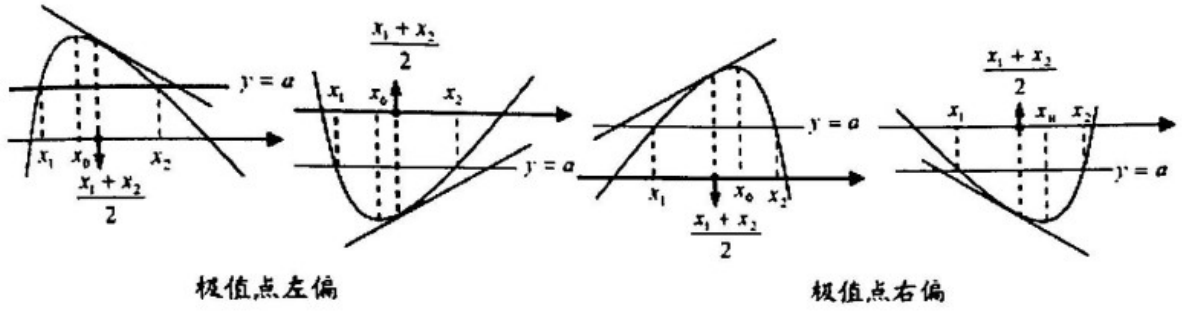
又 $\frac{1}{2}(x_1-x_2)<0$，则 $g(t)>0>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$，则 $2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$

所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. 证毕.

7.极值点偏移问题（构造对称函数，利用对数均值不等式）

极值点偏移问题，是指对于单极值函数，由于函数极值点左右的增减速度不同，使得函数图象没有对称性.

已知函数 $y=f(x)$ 是连续函数，在区间 (x_1,x_2) 内有且只有一个极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_2)$，若极值点左右的“增减速度”相同，常常有极值点 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，我们称这种状态为极值点不偏移；若极值点左右的“增减速度”不同，函数的图象不具有对称性，常常有极值点 $x_0\neq\frac{x_1+x_2}{2}$ 的情况，我们称这种状态为“极值点偏移”.



极值点左偏　　极值点右偏

极值点偏移问题的一般题设形式：

1. 若函数 $f(x)$ 存在两个零点 x_1,x_2 且 $x_1\neq x_2$，求证：$x_1+x_2>2x_0$（x_0 为 $f(x)$ 的极值点）；

2. 若函数 $f(x)$ 中存在 x_1,x_2 且 $x_1\neq x_2$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1+x_2>2x_0$（x_0 为极值点）；

3. 若函数 $f(x)$ 存在两个零点 x_1,x_2 且 $x_1\neq x_2$，令 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，求证：$f'(x_0)>0$；

4. 若函数 $f(x)$ 中存在 x_1,x_2 且 $x_1\neq x_2$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，令 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，求证：$f'(x_0)>0$.

极值点偏移问题的一般解题步骤：

若 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，而 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，证明 $x_1+x_2<2x_0$（或 $x_1+x_2>2x_0$），根据函数单调性求解的步骤是：

一、构建函数 $h(x)=f(x)-f(2x_0-x)$，判断函数 $h(x)$ 的单调性，注意 $h(x)$ 必严格单调

二、证明 $h(x)>0$（或 $h(x)<0$）即 $f(x)>f(2x_0-x)$（或 $f(x)<f(2x_0-x)$），

三、由函数 $f(x)$ 的单调性证 $x_1+x_2<2x_0$（或 $x_1+x_2>2x_0$）.

根据对数平均不等式求解的步骤是：

一、通过等式两边同取自然对数或相减等配凑出 $\ln x_1-\ln x_2$ 及 x_1-x_2，

二、通过等式两边同除以 $\ln x_1-\ln x_2$ 构建对数平均数 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，

三、利用对数平均不等式将 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$ 转化为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 后再证明 $x_1+x_2<2x_0$（或 $x_1+x_2>2x_0$）

对数平均不等式的证明（可速解部分极值点偏移问题）

证明：当 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$ 时，$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$.

证明：根据对称性，不妨设 $a>b>0$.

①因为 $\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}\Leftrightarrow \ln a-\ln b<\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{\frac{a}{b}-1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$，令 $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 且 $x>1$.

即证 $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$ 令 $f(x)=2\ln x-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)(x>1)$，则 $f'(x)=-\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^2$.

因为 $x>1$，所以 $f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $f(x)<f(1)=0$.

即 $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$ 成立，可知 $\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}$ 成立.

②因为 $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}\Leftrightarrow \ln a-\ln b>\dfrac{2(a-b)}{a+b}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}>\dfrac{2\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\frac{a}{b}+1}\Leftrightarrow \ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

$x=\dfrac{a}{b}$ 且 $x>1$. 令 $g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$，

因为 $x>1$，所以 $g'(x)>0$. 所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 所以 $g(x)>g(1)=0$.

即 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 成立，可知 $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$.

综上所述：当 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$ 时，$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$.

例 1：（解决极值点偏移问题的三种常规方法）已知函数 $F(x)=(1+m)x-\ln x$，设 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$ 分别是函数 $F(x)$ 的两个零点，求证：$F'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$.

解：由题意得

$F'(x)=m+1-\dfrac{1}{x}$，因为 x_1,x_2 分别是函数 $F(x)$ 的两个零点，所以 $\begin{cases}(1+m)x_1=\ln x_1\\(1+m)x_2=\ln x_2\end{cases}$，

两式相减，得 $m+1=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，所以 $F'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)=m+1-\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$，

要证明 $F'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$，只需证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$.

解法一：因为 $0<x_1<x_2$，只需证 $\ln x_1-\ln x_2>\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}\Leftrightarrow\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}}}{}>0$.

令 $t=\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}\in(0,1)$，即证 $2\ln t-t+\dfrac{1}{t}>0$. 令 $h(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}(0<t<1)$，

则 $h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{(t-1)^2}{t^2}<0$，

所以函数 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$h(t)>h(1)=0$，即证 $2\ln t-t+\dfrac{1}{t}>0$.

由上述分析可知 $F'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$.

解法二：因为 $0<x_1<x_2$，只需证 $\ln x_1-\ln x_2-\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}>0$，

设 $Q(x)=\ln x-\ln x_2-\dfrac{x-x_2}{\sqrt{x_2x}}(0<x<x_2)$，则

$$Q'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x_2x}-(x-x_2)\dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x}}}{x_2x}=\frac{1}{x}-\frac{x+x_2}{2\sqrt{x_2}x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x_2x}-x-x_2}{2\sqrt{x_2}x\sqrt{x}}=-\frac{\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x_2}x\sqrt{x}}<0$$

所以函数 $Q(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，$Q(x)>Q(x_2)=0$，即证 $\ln x-\ln x_2>\dfrac{x-x_2}{\sqrt{x_2x}}$.

由上述分析可知 $F'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$.

解法三：要证明 $F'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$，只需证 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$.

即证 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$，由对数平均数显然成立（注意解答题必须给出证明）.

例 2：已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x+m$.

(Ⅰ)若 $f(x)\le g(x)$ 恒成立，求 m 的取值范围；

(Ⅱ)已知 x_1,x_2 是函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的两个零点，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1x_2<1$.

解：由题意得

（Ⅰ）略

（Ⅱ）（方法一：构造对称函数）

$F(x)=f(x)-g(x)=\ln x-x-m \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

令 $F'(x)>0 \Rightarrow 0<x<1$，$F(x)$ 递增

令 $F'(x)<0 \Rightarrow x>1$，$F(x)$ 递减　$\therefore x=1$ 为 $F(x)$ 的极大值点，设 $0<x_1<1<x_2$

构造 $\varphi(x)=F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)$，观察到 $\varphi(1)=0$

此时 $\varphi(x)=\ln x-x-m-(\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{x}-m)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$

$\therefore \varphi'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2-2x+1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\le 0 \Rightarrow \varphi(x)$ 递减 $\Rightarrow \varphi(x_1)>\varphi(1)$

即 $F(x_1)-F\left(\frac{1}{x_1}\right)>0 \Rightarrow F(x_1)>F\left(\frac{1}{x_1}\right)$，又 $F(x_1)=F(x_2)$，$\therefore F(x_2)>F\left(\frac{1}{x_1}\right)$

$\because x_1<1<x_2, \therefore \frac{1}{x_1}>1$，而 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减，$\therefore x_2<\frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1x_2<1$，证毕

（方法二：利用对数均值不等式）

$\begin{cases}\ln x_1-x_1-m=0\\ \ln x_2-x_2-m=0\end{cases} \Rightarrow \ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2 \Rightarrow \frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1$，下证 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$

要证 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$，即证 $\ln x_2-\ln x_1<\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \ln\frac{x_2}{x_1}<\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$，设 $t=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}>1$，

即证 $2\ln t-t+\frac{1}{t}<0$，设 $\varphi(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t} \Rightarrow \varphi'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$，

$\therefore \varphi(t)$ 递减　$\therefore \varphi(t)<\varphi(1)=0$，即 $x_1x_2<1$，证毕

例 3： 已知函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，若 $x_1\ne x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1+x_2>4$.

解：由题意得

由函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$ 单调性可知：若 $f(x_1)=f(x_2)$，则必有 $x_1<2<x_2$，所以 $4-x_1>2$，

而 $f(x_1)-f(4-x_1)=\frac{2}{x_1}+\ln x_1-\frac{2}{4-x_1}+\ln(4-x_1)$，

构造 $h(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{4-x}+\ln x+\ln(4-x)$，则

$h'(x)=-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{(4-x)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}=\frac{-2(4-x)^2-2x^2+x(4-x)^2+x^2(4-x)}{x^2(4-x)^2}=-\frac{8(x-2)^2}{x^2(4-x)^2}<0$

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 为减函数，所以 $h(x)>h(2)=0$，

所以 $f(x_1)-f(4-x_1)>0$ 即 $f(x_1)>f(4-x_1)$，所以 $f(x_2)>f(4-x_2)$，所以 $x_1+x_2>4$.

例 4: 设 $f(x)=a^2x-\frac{1}{x}-2a\ln ax(a>0)$，函数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，且 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ 是 $f(x)$ 的图象上不同的两点，满足 $f(x_1)+f(x_2)=0$，线段 AB 中点的横坐标为 x_0，证明：$ax_0>1$.

解：由题意得

要证 $ax_0>1\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}\Leftrightarrow x_1>\frac{2}{a}-x_2$，又依题意 $f'(x)=(a-\frac{1}{x})^2\geq 0$，

得 $f(x)$ 在定义域上单调递增，所以要证 $ax_0>1$，只需证 $-f(x_2)=f(x_1)>f(\frac{2}{a}-x_2)$，

即 $f(\frac{2}{a}-x_2)+f(x_2)<0$ ……①

不妨设 $x_1<x_2$，注意到 $f(\frac{1}{a})=0$，由函数单调性知，有 $x_1<\frac{1}{a},x_2>\frac{1}{a}$，

构造函数 $F(x)=f(\frac{2}{a}-x)+f(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-f'(\frac{2}{a}-x)=-\frac{4(ax-1)^3}{x^2(2-ax)^2}$，

当 $x\geq\frac{1}{a}$ 时，$F'(x)\leq 0$，即 $F(x)$ 单调递减，当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$F(x)<F(\frac{1}{a})=0$，

从而不等式①式成立，故原不等式成立.

例 5: 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(1-2a)e^x-x$.

(1) 当 $a<0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同零点 x_1，x_2，证明：$a>1$ 且 $x_1+x_2<0$.

解：由题意得

(1) $f'(x)=2ae^{2x}+(1-2a)e^x-1=(e^x-1)(2ae^x+1)$.

因为 $a<0$，由 $f'(x)=0$ 得，$x=0$ 或 $x=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)$.

当 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)<0$ 即 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)\right)$ 单调递减，在 $\left(\ln\left(-\frac{1}{2a}\right),0\right)$ 单调递增，在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

当 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)=0$ 即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减；

当 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)>0$ 即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $\left(0,\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)\right)$ 单调递增，在 $\left(\ln\left(-\frac{1}{2a}\right),+\infty\right)$ 单调递减.

(2) 当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f\left(\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)\right)=1-\frac{1}{4a}-\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)>1>0$，

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1-a>1>0$，

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调，故 $a<0$ 时，$f(x)$ 至多有一个零点.

当 $a\geq 0$ 时，易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

要使 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(0)<0$，即 $a+1-2a<0$，得 $a>1$.

令 $F(x)=f(x)-f(-x)$，（$x>0$），

则 $F'(x)=f'(x)+f'(-x)=\left(2ae^{2x}+(1-2a)e^{x}-1\right)+\left(2ae^{-2x}+(1-2a)e^{-x}-1\right)$

$=2a\left(e^{x}+e^{-x}+1\right)\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)+\left(e^{x}+e^{-x}\right)-2\geq 0$，所以 $F(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，

$F(x)>F(0)=0$，$f(x)>f(-x)$.

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1<0$，$x_2>0$，$-x_2<0$，$f(x_1)=f(x_2)>f(-x_2)$.

由 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减得，$x_1<-x_2$，即 $x_1+x_2<0$.

例 6： 已知函数 $f(x)=e^{x}-a(x-1)$ 有两个零点.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）设 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1\cdot x_2<x_1+x_2$.

解：由题意得

（1）$f'(x)=e^{x}-a$，

当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不符合题意，

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $x=\ln a$ 时 $f(x)$ 取得极小值，也是最小值，

$f(x)$ 要有两个零点，则 $f(\ln a)<0$，即 $a(2-\ln a)<0$，解得 $a>e^{2}$，所以 $\ln a>2$，

当 $x=1<\ln a$ 时，得 $f(1)=e>0$，

当 $x=2\ln a>\ln a$ 时，$f(2\ln a)=a^{2}-2a\ln a+a=a(a-2\ln a+1)$，

设 $\varphi(a)=a-2\ln a+1$，则 $\varphi'(a)=1-\frac{2}{a}=\frac{a-2}{a}>0$

所以 $\varphi(a)$ 单调递增，则 $\varphi(a)>\varphi(e^{2})=e^{2}+1-4>0$，

所以 $f(2\ln a)=a(a-2\ln a+1)>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,\ln a)$ 上有且只有一个零点，在 $(\ln a,2\ln a)$ 上有且只有一个零点，

综上：满足 $f(x)$ 有两个零点的 a 的取值范围为 $(e^{2}+\infty)$.

（2）$f(x_1)=f(x_2)=0$，要证$x_1\cdot x_2<x_1+x_2$，即证$(x_1-1)(x_2-1)<1$，

根据$f(x_1)=f(x_2)=0$，可知$e^{x_1}=a(x_1-1)$，$e^{x_2}=a(x_2-1)$，

即证$(x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{e^{x_1+x_2}}{a^2}<1$，即证$e^{x_1+x_2}<a^2$，即证$x_1+x_2<2\ln a$，

即证$x_2<2\ln a-x_1$，设$x_1<\ln a$，$x_2>\ln a$，由（1）知$f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，

故只需证明$f(x_2)<f(2\ln a-x_1)$，而$f(x_2)=f(x_1)$，所以只需证$f(x_1)<f(2\ln a-x_1)$

令$g(x)=f(2\ln a-x)-f(x)$，且$x<\ln a$，所以$g(x)=\dfrac{a^2}{e^x}-e^x+2ax-2a\ln a$，$x<\ln a$，

$$g'(x)=-\frac{a^2}{e^x}-e^x+2a=-\frac{a^2+e^{2x}-2ae^x}{e^x}=-\frac{(e^x-a)^2}{e^x}<0$$

故$g(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，所以$g(x)>g(\ln a)=f(2\ln a-\ln a)-f(\ln a)=0$，

所以$f(2\ln a-x)>f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上恒成立，所以$f(2\ln a-x_1)>f(x_1)$，

证毕.

例7： 已知函数$f(x)=a\ln x-x$，且函数$f(x)$在$x=1$处取到极值.

（1）求曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）若函数$g(x)=\dfrac{(x-m)^2}{f(x)+x}(0<m<1)$，且函数$g(x)$有3个极值点$x_1$，$x_2$，$x_3$ $(x_1<x_2<x_3)$，

证明：$\ln\left(\dfrac{x_1+x_3}{2}\right)>-\dfrac{1}{2}$.

解：由题意得

（1）$f'(x)=\dfrac{a}{x}-1$，$f'(1)=a-1=0$，即$a=1$. 则$f(x)=\ln x-x$，$f(1)=-1$，

故曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-1$；

（2）$g(x)=\dfrac{(x-m)^2}{f(x)+x}=\dfrac{(x-m)^2}{\ln x+x-x}=\dfrac{(x-m)^2}{\ln x}(0<m<1)$，函数的定义域为$x>0$且$x\neq1$，

$$g'(x)=\frac{2(x-m)\ln x-(x-m)^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{(x-m)\left(2\ln x+\frac{m}{x}-1\right)}{\ln^2 x}$$，令$h(x)=2\ln x+\dfrac{m}{x}-1$，

$\therefore h'(x)=\dfrac{2x-m}{x^2}$，$h(x)$在$\left(0,\dfrac{m}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{m}{2},+\infty\right)$上单调递增；$h(\frac{m}{2})$最小；

$\because g(x)$有三个极值点$x_1<x_2<x_3$，$\therefore h\left(\dfrac{m}{2}\right)=2\ln\dfrac{m}{2}+1<0$，得$m<\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

当$0<m<\dfrac{2}{\sqrt{e}}$时，$h(m)=2\ln m<0$，$h(1)=m-1<0$，$\therefore x_2=m$；

即x_1，x_3是函数$h(x)$的两个零点. $\therefore\begin{cases}2\ln x_1+\dfrac{m}{x_1}-1=0\\2\ln x_2+\dfrac{m}{x_2}-1=0\end{cases}$，

消去 m 得 $2x_1\ln x_1 - x_1 = 2x_3\ln x_3 - x_3$；令 $\varphi(x) = 2x\ln x - x$，$\varphi'(x) = 2\ln x + 1$，

$\varphi'(x)$ 的零点为 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$，且 $x_1 < \frac{1}{\sqrt{e}} < x_3$. $\therefore \varphi(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ 上递增.

要证 $\ln\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right) > -\frac{1}{2}$，即证 $x_1 + x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}}$，也就是证 $x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}} - x_1$，即 $\varphi(x_3) > \varphi\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - x_1\right)$.

$\because \varphi(x_1) = \varphi(x_3)$，$\therefore$ 即证 $\varphi(x_1) > \varphi\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - x_1\right)$. 构造函数 $F(x) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - x\right)$，

则 $F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0$；$\therefore$ 只要证明在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ 上 $F(x)$ 单调递减，函数 $\varphi(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ 递减；

$\because x$ 增大时，$\frac{1}{\sqrt{e}} - x$ 减小，$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - x\right)$ 增大，$-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - x\right)$ 减小，

$\therefore -\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - x\right)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ 上是减函数. $\therefore \varphi(x) - \varphi\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - x\right)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ 上是减函数.

$\therefore$ 当 $0 < a < \frac{2}{\sqrt{e}}$ 时，$x_1 + x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}}$，即 $\ln\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right) > -\frac{1}{2}$. 证毕.

例 8： 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}ax - b$，$g(x) = ax^2 + bx$.

（1）当 $a = 2$，$b = -3$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程，并求函数 $f(x)$ 的最大值；

（2）若函数 $y = f(x)$ 的两个零点分别为 x_1，x_2，且 $x_1 \neq x_2$，求证：$g(\frac{x_1+x_2}{2}) > 1$.

解：由题意得

（1）$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 3 (x > 0)$，$f'(x) = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2}$，则 $f'(e) = -1$，切点为 $\left(e, \frac{1}{e} - e + 3\right)$，

故函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $x + y - \frac{1}{e} - 3 = 0$.

令 $h(x) = 1 - \ln x - x^2$，则 $h(x) = 1 - \ln x - x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数，又 $h(1) = 0$，

所以 $x \in (0,1)$，$h(x) > 0$，$f'(x) > 0$，$x \in (1, +\infty)$，$h(x) < 0$，$f'(x) < 0$，

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，在 $(1, +\infty)$ 是减函数，$f_{\max}(x) = f(1) = 2$.

（2）证明：不妨设 $x_1 < x_2$，$\therefore \frac{\ln x_1}{x_1} - \frac{1}{2}ax_1 - b = 0$，$\frac{\ln x_2}{x_2} - \frac{1}{2}ax_2 - b = 0$，

$\therefore \ln x_1 - \frac{1}{2}ax_1^2 - bx_1 = 0$，$\ln x_2 - \frac{1}{2}ax_2^2 - bx_2 = 0$，

相减得：$\ln x_1 - \ln x_2 - \frac{1}{2}a(x_1^2 - x_2^2) - b(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} - \frac{1}{2}a(x_1 + x_2) - b = 0$

$$\Rightarrow \frac{(x_1+x_2)\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-\frac{1}{2}a(x_1+x_2)^2-b(x_1+x_2)=0 \text{ 即 } \frac{(x_1+x_2)\ln\frac{x_1}{x_2}}{2(x_1-x_2)}-a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=0,$$

$$\therefore \frac{(x_1+x_2)\ln\frac{x_1}{x_2}}{2(x_1-x_2)}=g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Rightarrow g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{(x_1+x_2)\ln\frac{x_1}{x_2}}{2(x_1-x_2)}=\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}, \text{ 令 } t=\frac{x_1}{x_2},$$

即证 $0<t<1$，$\frac{(t+1)\ln t}{2(t-1)}>1$，$\frac{(t+1)\ln t}{2(t-1)}>1\Leftrightarrow \ln t<\frac{2(t-1)}{t+1}\Leftrightarrow \ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}<0$，

令 $m(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$t\in(0,1)$，$m'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$m(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，又 $\because m(1)=0$，

$\therefore t\in(0,1)$，$m(t)<0$，命题得证.

例 9：已知函数 $f(x)=x(\ln x-k-1)$，$k\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $x>1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) 若对于任意 $x\in\left[e,e^2\right]$，都有 $f(x)<4\ln x$ 成立，求实数 k 的取值范围；

(3) 若 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1\cdot x_2<e^{2k}$.

解：由题意得

(1) $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot x+\ln x-k-1=\ln x-k$，

当 $k\leq 0$ 时，因为 $x>1$，所以 $f'(x)=\ln x-k>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，无极值；

当 $k>0$ 时，令 $\ln x-k=0$，解得 $x=e^k$，

当 $1<x<e^k$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(1,e^k)$

当 $x>e^k$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(e^k,+\infty)$，

所以在区间 $(1,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(e^k)=(k-k-1)e^k=-e^k$，无极大值.

(2) 问题转化为 $(x-4)\ln x-(k+1)x<0$ 对于 $x\in\left[e,e^2\right]$ 恒成立，即 $k+1>\left[\frac{(x-4)\ln x}{x}\right]_{\max}$

令 $g(x)=\frac{(x-4)\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{4\ln x+x-4}{x^2}$，令 $t(x)=4\ln x+x-4, x\in\left[e,e^2\right]$，

则 $t'(x)=\frac{4}{x}+1>0$，所以 $t(x)$ 递增，故 $t(x)_{\min}=t(e)=e-4+4=e>0$，故 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $\left[e,e^2\right]$ 上单调递增，函数 $g(x)_{\max}=g(e^2)=2-\frac{8}{e^2}$.

所以 $k+1>2-\frac{8}{e^2}$，即实数 k 的取值范围为 $\left(1-\frac{8}{e^2},+\infty\right)$.

(3) 证法 1 因为 $f(x_1)=f(x_2)$，由 (1) 知，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,e^k)$ 上单调递减，在区间 $(e^k,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(e^{k+1})=0$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<e^k<x_2<e^{k+1}$，

要证 $x_1x_2<e^{2k}$，只要证 $x_2<\dfrac{e^{2k}}{x_1}$，即证 $e^k<x_2<\dfrac{e^{2k}}{x_1}$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(e^k,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x_2)<f\left(\dfrac{e^{2k}}{x_1}\right)$，又 $f(x_1)=f(x_2)$，

即证 $f(x_1)<f\left(\dfrac{e^{2k}}{x_1}\right)$，构造 $h(x)=f(x)-f\left(\dfrac{e^{2k}}{x}\right)=(\ln x-k-1)x-\left(\ln\dfrac{e^{2k}}{x}-k-1\right)\dfrac{e^{2k}}{x}$，

即 $h(x)=x\ln x-(k+1)x+e^{2k}\left(\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{k-1}{x}\right)$，$x\in(0,e^k)$.

$$h'(x)=\ln x+1-(k+1)+e^{2k}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{k-1}{x^2}\right)=(\ln x-k)\frac{(x^2-e^{2k})}{x^2},$$

因为 $x\in(0,e^k)$，所以 $\ln x-k<0,x^2<e^{2k}$，即 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 递增，故 $h(x)<h(e^k)$，

而 $h(e^k)=f(e^k)-f\left(\dfrac{e^{2k}}{e^k}\right)=0$，故 $h(x)<0$，

所以 $f(x_1)<f\left(\dfrac{e^{2k}}{x_1}\right)$，即 $f(x_2)=f(x_1)<f\left(\dfrac{e^{2k}}{x_1}\right)$，所以 $x_1x_2<e^{2k}$ 成立.

证法 2 要证 $x_1x_2<e^{2k}$ 成立，只要证：$\ln x_1+\ln x_2<2k$.

因为 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $(\ln x_1-k-1)x_1=(\ln x_2-k-1)x_2$，

即 $x_1\ln x_1-x_2\ln x_2=(k+1)(x_1-x_2)$，$x_1\ln x_1-x_2\ln x_1+x_2\ln x_1-x_2\ln x_2=(k+1)(x_1-x_2)$，

即 $(x_1-x_2)\ln x_1+x_2\ln\dfrac{x_1}{x_2}=(k+1)(x_1-x_2)$，$k+1=\ln x_1+\dfrac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，同理 $k+1=\ln x_2+\dfrac{x_1\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

从而 $2k=\ln x_1+\ln x_2+\dfrac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}+\dfrac{x_1\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-2$，即证 $\dfrac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}+\dfrac{x_1\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-2>0$，

不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<\dfrac{x_1}{x_2}=t<1$，即证 $\dfrac{\ln t}{t-1}+\dfrac{\ln t}{1-\frac{1}{t}}-2>0$，即证 $\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$，

即证 $\ln t<2\dfrac{t-1}{t+1}$ 对 $t\in(0,1)$ 恒成立，设 $h(t)=\ln t-2\dfrac{t-1}{t+1}(0<t<1)$，

$$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0,$$

所以 $h(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 单调递增，$h(t)<h(1)=0$，所以 $x_1x_2<e^{2k}$. 证毕.

8.先构造，再赋值，正面和（积）式不等式（构造与赋值思想）

例1： 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$

(Ⅰ)若 $f(x)\geq 0$，求 a 的值；

(Ⅱ)设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})<m$，求 m 的最小值；

(Ⅲ)求证：$e^{\frac{n}{n+1}}>\frac{3}{n(n+1)}$.

解： 由题意得

(Ⅰ) $f(x)\geq 0$ 恒成立即 $f(x)_{\min}\geq 0$，观察到 $f(1)=0$，

$f(x)=x-1-a\ln x\Rightarrow f'(x)=1-\frac{a}{x}$

当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立 $\Rightarrow f(x)$ 递增，当 $x\in(0,1)$，$f(x)<0$，不合题意

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0\Rightarrow x>a$，　$f(x)$ 递增；

令 $f'(x)<0\Rightarrow 0<x<a$，$f(x)$ 递减

$\therefore f(x)_{\min}=g(a)=a-1-a\ln a\geq 0$，即 $a-1-a\ln a\geq 0$，设 $g(a)=a-1-a\ln a$

$g'(a)=-\ln a$，令 $g'(a)>0\Rightarrow 0<a<1$；$g(a)$ 递增；

令 $g'(a)<0\Rightarrow a>1$；$g(a)$ 递减

$\therefore g(a)_{\max}=g(0)=0$，即 $g(a)\geq 0\Rightarrow a=1$

(Ⅱ)由(Ⅰ)得：$x-1-\ln x\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立 $\Rightarrow x-1\geq\ln x$

令 $x=1+\frac{1}{2^n}$，即 $\frac{1}{2^n}\geq\ln(1+\frac{1}{2^n})$

$$\ln(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})=\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{2^2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{2^n})\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}<1$$

$\Rightarrow(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})\leq e$，即 $m>e\Rightarrow m_{\min}=3$

(Ⅲ) 令 $x=\frac{n^2+n+1}{n^2+n}$，即 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\geq\ln\frac{n^2+n+1}{n^2+n}$，又 $\ln\frac{n^2+n+1}{n^2+n}>\ln\frac{n^2-n}{n^2+n}=\ln\frac{n-1}{n+1}$

$$\therefore(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})>\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{2}{4}+\ln\frac{3}{5}+\cdots+\ln\frac{n-2}{n}+\ln\frac{n-1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{n+1}>\ln\frac{3}{2}+\ln\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)\Rightarrow\frac{n}{n+1}>\ln\frac{3}{n(n+1)}\Rightarrow e^{\frac{n}{n+1}}>\frac{3}{n(n+1)}$$，证毕

例 2： 已知$n\in N^+$，求证$(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{2^2})\cdot(1+\frac{1}{2^3})\cdots(1+\frac{1}{2^n})<3$

证明：利用函数不等式$e^x\geq x+1$. 令$x=\frac{1}{2^n}$，即$e^{\frac{1}{2^n}}\geq\frac{1}{2^n}+1$，即$1+\frac{1}{2^n}\leq e^{\frac{1}{2^n}}$，

故$(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{2^2})\cdot(1+\frac{1}{2^3})\cdots(1+\frac{1}{2^n})<e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{\frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}{1-\frac{1}{2}}}=e^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}<e<3$

故原不等式得证.

例 3： 证明：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}\left(n\geq 1,n\in N^*\right)$

证明：利用函数不等式$\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\geq\ln x(x\geq 1)$，

令$x=\frac{k+1}{k}$，则$\ln\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2}(\frac{k+1}{k}-\frac{k}{k+1})=\frac{1}{2}[(1+\frac{1}{k})-(1-\frac{1}{k+1})]$，

所以$\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{2}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})$，$k=1,2,3,\cdots,n$，

这n个不等式相加得$\ln(k+1)<\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})+\frac{1}{2(n+1)}$，

整理得$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}$. 证毕.

例 4： 求证：$\ln(2+1)+\ln\left(2^2+1\right)+\cdots+\ln\left(2^n+1\right)<1-\frac{1}{2^n}+\frac{n(n+1)}{2}\ln 2$

证明：利用函数不等式$\ln x\leq x-1$，则当$x>0$时$\ln(x+1)<x$，令$x=\frac{1}{2^n}$，则$\ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)<\frac{1}{2^n}$

所以$\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)+\ln\left(\frac{1}{2^2}+1\right)+\cdots+\ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$，

即$\ln\frac{2+1}{2}+\ln\frac{2^2+1}{2^2}+\cdots+\ln\frac{2^n+1}{2^n}<1-\frac{1}{2^n}$

整理得$[\ln(2+1)-\ln 2]+\left[\ln\left(2^2+1\right)-2\ln 2\right]+\cdots+\left[\ln\left(2^n+1\right)-n\ln 2\right]<1-\frac{1}{2^n}$，

即$\ln(2+1)+\ln\left(2^2+1\right)+\cdots+\ln\left(2^n+1\right)<1-\frac{1}{2^n}+\frac{n(n+1)}{2}\ln 2$. 证毕.

例 5： 证明：$\ln 2+(\ln 3-\ln 2)^2+(\ln 4-\ln 3)^3+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]^n<\frac{e}{e-1}$.

证明：利用函数不等式$e^x>\ln(x+2)$，令$x=\frac{-n+1}{n}$，

即 $e^{\frac{-n+1}{n}}>\ln\left(\frac{-n+1}{n}+2\right)$，即 $e^{-n+1}>\ln^n\left(\frac{-n+1}{n}+2\right)$，由此可知，

当 $n=1$ 时，$e^0>\ln 2$，当 $n=2$ 时，$e^{-1}>(\ln 3-\ln 2)^2$，当 $n=3$ 时，$e^{-2}>(\ln 4-\ln 3)^3$，

……当 $n=n$ 时，$e^{-n+1}>[\ln(n+1)-\ln n]^n$.

累加：$e^0+e^{-1}+e^{-2}+\ldots+e^{-n+1}>\ln 2+(\ln 3-\ln 2)^2+(\ln 4-\ln 3)^3+\ldots+[\ln(n+1)-\ln n]^n$

即 $\frac{1}{1-\frac{1}{e}}>e^0+e^{-1}+e^{-2}+\ldots+e^{-n+1}>\ln 2+(\ln 3-\ln 2)^2+(\ln 4-\ln 3)^3+\ldots+[\ln(n+1)-\ln n]^n$

即 $\ln 2+(\ln 3-\ln 2)^2+(\ln 4-\ln 3)^3+\ldots+[\ln(n+1)-\ln n]^n<\frac{e}{e-1}$. 证毕.

例 6： 已知函数 $f(x)=x\ln x+ax+1, a\in R$.

（1）当 $x>0$ 时，若关于 x 的不等式 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（2）当 $n\in N^*$ 时，证明：$\frac{n}{2n+4}<\ln^2 2+\ln^2\frac{3}{2}+\cdots+\ln^2\frac{n+1}{n}<\frac{n}{n+1}$

解：由题意得

（1）略

（2）设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项的和分别为 $S_n=\frac{n}{2n+4}, T_n=\frac{n}{n+1}$，则

则 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2),\end{cases}\Rightarrow a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$，同理得 $b_n=\frac{1}{n(n+1)}$，

本题转化为只需证明 $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\ln^2\frac{n+1}{n}<b_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

借用第一问的结论：$x\ln x\geq x-1$，即 $\ln x\geq\frac{x-1}{x}$，令 $x=\frac{n+1}{n}>1$，则 $\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}$，

所以 $\ln^2\frac{n+1}{n}>\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，

所以 $\ln^2 2+\ln^2\frac{3}{2}+\cdots+\ln^2\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$；

再证明 $\ln^2\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n(n+1)}$，即证 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$，因为 $\ln\frac{n+1}{n}=2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}$，

$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，所以只需证 $2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，

下证 $2\ln x<x-\frac{1}{x}(x>1)$，设 $h(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，

故函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)<h(1)=0$，当 $x>1$ 时，$2\ln x<x-\frac{1}{x}$ 恒成立，

令 $x=\sqrt{\frac{n+1}{n}}>1$，则 $2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，

综上 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\ln^2\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n(n+1)}$，所以 $\frac{n}{2n+4}<\ln^2 2+\ln^2\frac{3}{2}+\cdots+\ln^2\frac{n+1}{n}<\frac{n}{n+1}$.

例 7： 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设 $g(x)=f(x)-a\ln x$，$g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，其中 $x_1\in(0,e]$，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值；

（3）证明：$\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k-1}{k+1}>\frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}\ (n\in N^*,n\geq 2)$.

解：由题意得

（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，$f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $f(x)=0$ 得 $x^2-ax+1=0$，

当 $\Delta=a^2-4\leq 0$，即 $0<a\leq 2$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增；

当 $\Delta=a^2-4>0$，即 $a>2$ 时，$x^2-ax+1=0$ 的两根为 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ $x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0,f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0,f(x)$ 单调递增，

综上所述：

当 $a\leq 2$，$f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无递减区间；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 的递增区间为 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$，

递减区间为 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$

（2）$g(x)=x-\frac{1}{x}-2a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x}=\frac{x^2-2ax+1}{x^2}$，

令 $g'(x)=0$，$x^2-2ax+1=0$，两根为 x_1,x_2，且 $\begin{cases}x_1+x_2=2a\\x_1x_2=1\end{cases}$，所以 $x_2=\frac{1}{x_1},a=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)$

所以 $g(x_1)-g(x_2)=g(x_1)-g\left(\frac{1}{x_1}\right)=x_1-\frac{1}{x_1}-2a\ln x_1-\left(\frac{1}{x_1}-x_1-2a\ln\frac{1}{x_1}\right)$

$=2\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)-4a\ln x_1=2\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)-2\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\ln x_1$.

设 $h(x)=2\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x, x\in(0,e]$，则 $\left[g(x_1)-g(x_2)\right]_{\min}=h(x)_{\min}$，

$h'(x)=2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-2\left[\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x+\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right]=\frac{2(1+x)(1-x)\ln x}{x^2}$，$h(x)$ 在 $(0,e]$ 上递减

所以 $h(x)_{\min}=h(e)=-\frac{4}{e}$，所以 $\left[g(x_1)-g(x_2)\right]_{\min}=-\frac{4}{e}$.

(3) 因为 $\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k-1}{k+1}=\ln\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)}{3\times4\times5\times\cdots\times(n+1)}=\ln\frac{2}{n(n+1)}$，要证 $\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k-1}{k+1}>\frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$，

由（1）知函数不等式 $x-\frac{1}{x}-2\ln x>0$ 成立，即 $\ln x^2<x-\frac{1}{x}$，令 $x=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}>1$

所以 $\ln\frac{n(n+1)}{2}<\frac{n^2+n-2}{\sqrt{2n(n+1)}}$，即 $\ln\frac{2}{n(n+1)}>\frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$，

所以 $\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k-1}{k+1}>\frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}\left(n\in N^+,n\geq2\right)$. 证毕.

例 8： 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=ax+b$.

(1) 求证：$x>1$ 时，$f(x)>ax+b$；

(2) 求证：$\frac{\ln2}{1}+\frac{\ln7}{6}+\ldots+\frac{\ln(n^2-2)}{n^2-3}+\frac{2}{n}>\frac{3}{2}\left(n\geq2,n\in\mathbf{N}^*\right)$.

解：由题意得

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$，又 $f'(1)=2$，$f(1)=0$，

所以该切线方程为 $y=2(x-1)$.

设 $F(x)=(x+1)\ln x-2x+2(x>1)$，则 $F'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，

令 $g(x)=F'(x)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)=F'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=0$，所以 $g(x)=F'(x)>0$，即 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)>F(1)=0$，故 $x>1$ 时，$f(x)>ax+b$；

(2) 当 $x>1$ 时，$(x+1)\ln x>2(x-1)$. 令 $x=n^2-2>1(n\geq2,n\in N)$，

则$\left(n^2-1\right)\ln\left(n^2-2\right)>2\left(n^2-3\right)$，所以$\dfrac{\ln\left(n^2-2\right)}{n^2-3}>\dfrac{2}{n^2-1}=\dfrac{2}{(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$，

即$\sum_{k=2}^{n}\dfrac{\ln\left(k^2-2\right)}{k^2-3}>\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

故$\sum_{k=2}^{n}\dfrac{\ln\left(k^2-2\right)}{k^2-3}>1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{n}$，证毕.

例 9： 已知函数$f(x)=x^2-2x\ln x$，函数$g(x)=x+\dfrac{a}{x}-(\ln x)^2$，其中$a\in R$，$x_0$是$g(x)$的一个极值点，且$g\left(x_0\right)=2$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）求实数x_0和a的值；

（3）证明$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4k^2-1}}>\dfrac{1}{2}\ln(2n+1)\quad\left(n\in N^*\right)$.

解：由题意得

（1）函数$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=2x-2\ln x-2$，令$h\left(x\right)=f'\left(x\right)$，$h'(x)=\dfrac{2(x-1)}{x}$，

由$h'\left(x\right)=0$，可得$x=1$，列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$		极小值	

$\therefore h\left(x\right)\geq h\left(1\right)=0$，即$f'\left(x\right)\geq 0$，可得$f\left(x\right)$在区间$\left(0,+\infty\right)$单调递增；

（2）$g\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，且$g'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}$，

由已知得$g'\left(x\right)=0$，即$x_0^2-2x_0\ln x_0-a=0$，①

由$g\left(x_0\right)=2$可得，$x_0^2-x_0\left(\ln x_0\right)^2-2x_0+a=0$，②

联立①②，消去a，可得$2x_0-\left(\ln x_0\right)^2-2\ln x_0-2=0$，③

令$t(x)=2x-(\ln x)^2-2\ln x-2$，则$t'(x)=2-\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-\ln x-1)}{x}$，

由（1）知，$x-\ln x-1\geq 0$，故$t'\left(x\right)\geq 0$，$\therefore t\left(x\right)$在区间$\left(0,+\infty\right)$单调递增，

注意到$t\left(1\right)=0$，所以方程③有唯一解$x_0=1$，代入①，可得$a=1$，$\therefore x_0=1,a=1$；

（3）证明：由（1）知$f\left(x\right)=x^2-2x\ln x$在区间$\left(0,+\infty\right)$单调递增，

故当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>f\left(1\right)=1$，$g'(x)=\dfrac{x^2-2x\ln x-1}{x^2}=\dfrac{f(x)-1}{x^2}>0$，$g\left(x\right)$递增，

当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=2$，即 $x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2>2$，亦即 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>(\ln x)^2$，

观察到 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0,\ln x>0$，故可得 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>\ln x$，取 $x=\frac{2k+1}{2k-1},k\in N^*$，

可得 $\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}-\frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}>\ln(2k+1)-\ln(2k-1)$，而 $\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}-\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}=\frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}$，

故 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}>\sum_{k=1}^{n}(\ln(2k+1)-\ln(2k-1))=\ln(2\pi+1)$

$\therefore\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k^2-1}}>\frac{1}{2}\ln(2x+1)(n\in N^*)$. 证毕.

例 10： 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=\frac{a(x^2-x)}{2}$.

(1) 若 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 求证：$\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]\left[1+\frac{2}{(n+1)^2}\right]\cdots\left[1+\frac{n}{(n+1)^2}\right]<\sqrt{e}$.

解：由题意得

(1) $x\ln x-\frac{a(x^2-x)}{2}<0$，即 $x\left[\ln x-\frac{a(x-1)}{2}\right]<0$，记 $h(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{2}$，

则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{2}=\frac{2-ax}{2x}$，

当 $a\le 0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，由 $h(1)=0$，$h(x)>h(1)=0$，

所以 $xh(x)>0$，即 $f(x)<g(x)$ 不恒成立；

当 $0<a<2$ 时，$\frac{2}{a}>1,x\in\left(1,\frac{2}{a}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，$f(x)<g(x)$ 不恒成立；

当 $a\ge 2$ 时，$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)<h(1)=0$，

所以 $xh(x)<0$，即 $f(x)<g(x)$ 恒成立；

故 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$；

(2) 当 $a=2$ 时，$f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上成立，即 $\ln x<x-1$，令 $x=1+\frac{k}{(n+1)^2},k=1,2,\cdots,n$，

则 $\ln\left[1+\frac{k}{(n+1)^2}\right]<\frac{k}{(n+1)^2}$，

所以 $\sum_{k=1}^{n}\ln\left[1+\frac{k}{(n+1)^2}\right]=\ln\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]\left[1+\frac{2}{(n+1)^2}\right]\cdots\left[1+\frac{n}{(n+1)^2}\right]$

$$<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)^2}=\frac{n}{2(n+1)}<\frac{1}{2},$$

所以$\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]\left[1+\frac{2}{(n+1)^2}\right]\cdots\left[1+\frac{n}{(n+1)^2}\right]<\sqrt{e}$，证毕

例 11： 函数$f(x)=\ln(x+1)+ax$的图象与直线$y=2x$相切.

（1）求a的值；

（2）证明：对于任意正整数n，$n^n\cdot e^{\frac{n}{n+1}}<\frac{(2n)!}{n!}<n^n\cdot e^{\frac{n+1}{2}}$.

解：由题意得

（1）$f'(x)=\frac{1}{x+1}+a$．设直线$y=2x$与曲线$y=f(x)$相切于点$P(x_0,y_0)$．依题意得：

$$\begin{cases}y_0=2x_0\\ y_0=\ln(x_0+1)+ax_0\\ \frac{1}{x_0+1}+a=2\end{cases}$$

整理得$\ln(x_0+1)-\frac{x_0}{x_0+1}=0$，令$g(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$，

$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$.

当$x>0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当$-1<x<0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减．当$x=0$时，$g(x)$取得最小值$g(0)=0$，

所以$g(x)\geq 0$，即$\ln(x+1)\geq\frac{x}{x+1}$．故方程的解为$x_0=0$，此时$a=1$.

（2）要证$n^n\cdot e^{\frac{n}{n+1}}<\frac{(2n)!}{n!}$，即证$n^n\cdot e^{\frac{n}{n+1}}<(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$，

只需证$e^{\frac{n}{n+1}}<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+n}{n}\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\cdots+\ln\frac{n+n}{n}$.

由（1）知$\ln(x+1)\geq\frac{x}{x+1}$，

因此$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$，$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)>\frac{2}{n+2}>\frac{1}{n+1}$，…，$\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)>\frac{n}{n+n}>\frac{1}{n+1}$.

上式累加得：$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]>\frac{n}{n+1}$，得证；

要证明$\frac{(2n)!}{n!}<n^n\cdot e^{\frac{n+1}{2}}$，即证$(n+1)(n+2)\cdots(n+n)<n^n\cdot e^{\frac{n+1}{2}}$，

只需证 $\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+n}{n}<e^{\frac{n+1}{2}}\Leftrightarrow \ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\cdots+\ln\frac{n+n}{n}<\frac{n+1}{2}$.

令 $h(x)=\ln(x+1)-x$，则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$.

当 $x>0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. 当 $x=0$ 时，$h(x)$ 取得最大值 $h(0)=0$，

即 $h(x)\le 0$，$\ln(x+1)\le x$. 因此

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)<\frac{2}{n}$，…，$\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)<\frac{n}{n}$.

上式累加得：$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]<\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$，得证；

综上：$n^n\cdot e^{\frac{n}{n+1}}<\frac{(2n)!}{n!}<n^n\cdot e^{\frac{n+1}{2}}$，证毕

9.含有lnx与e^x的证明问题（拆分思想）

例 1： 设函数 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}$，证明：$f(x)>1$

证明：要证 $e^x\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}>1$，即证 $x\ln x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$

设 $g(x)=x\ln x$，$h(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$，下证 $g(x)_{\min}>h(x)_{\max}$

$g'(x)=1+\ln x$

令 $g'(x)>0\Rightarrow x>\frac{1}{e}$，$g(x)$ 递增

令 $g'(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{e}$，$g(x)$ 递减，$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

$h'(x)>0=\frac{1-x}{e^x}$，

令 $h'(x)>0\Rightarrow 0<x<1$，$h(x)$ 递增

令 $h'(x)<0\Rightarrow x>1$，$h(x)$ 递减

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=-\frac{1}{e}$

即当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$

$\therefore f(x)>1$ 成立，证毕

例 2： 已知函数 $f(x)=1-\ln x+a^2x^2-ax(a\in R)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a=0$ 且 $x\in(0,1)$，求证：$\frac{f(x)}{e^x}+x-\frac{1}{x}<1$.

解：由题意得

（1）函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x}+2a^2x-a=\frac{2a^2x^2-ax-1}{x}=\frac{(2ax+1)(ax-1)}{x}$.

当 $a=0$ 时，则 $f(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$\frac{1}{a}>0>-\frac{1}{2a}$，令 $f(x)>0\Rightarrow x<-\frac{1}{2a}$ 或 $x>\frac{1}{a}$. 又 $x>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$-\frac{1}{2a}>0>\frac{1}{a}$，令 $f(x)>0\Rightarrow x<\frac{1}{a}$ 或 $x>-\frac{1}{2a}$. 又 $x>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增；

（2）要证 $\frac{f(x)}{e^x}+x-\frac{1}{x}<1$，只需证 $\frac{1-\ln x}{e^x}+x-\frac{1}{x}<1$，只需证 $x(1-\ln x)<\left(1+x-x^2\right)e^x$，

设 $g(x)=x(1-\ln x)$，$h(x)=\left(1+x-x^2\right)e^x$，

$g'(x)=-\ln x>0$ 在 $x\in(0,1)$ 上恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增. 故 $g(x)<g(1)=1$，

$h'(x)=-\left(x^2-x+2\right)e^x=-(x+2)(x-1)e^x>0$，所以 $h(x)$ 递增，所以 $h(x)>h(0)=1$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<h(x)$，证毕

例 3： 已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的零点个数；

（2）证明：当 $0<a\le\frac{e}{2}$ 时，$f(x)>\frac{e^{1-x}}{2}$.

解：由题意得

(1) $f'(x)=\frac{ax-1}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f\left(\frac{1}{e}\right)=-a+e>0$，$f\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=-1+e^{\frac{1}{a}}<0$，

此时 $f(x)$ 有 1 个零点；

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 无零点；

当 $a>0$ 时，$f'(x)<0\Rightarrow x\in(0,\frac{1}{a})$，$f(x)$ 递减；$f'(x)>0\Rightarrow x\in(\frac{1}{a},+\infty)$，$f(x)$ 递增，

$\therefore f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得最小值 $f(\frac{1}{a})=-a\ln a+a$，

若 $-a\ln a+a>0$，则 $a<e$，此时 $f(x)$ 没有零点；

若 $-a\ln a+a=0$，则 $a=e$，此时 $f(x)$ 有 1 个零点；

若 $-a\ln a+a<0$，则 $a>e$，$f(1)>0$，求导易得 $f(\frac{1}{a^2})>0$，此时 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a^2},\frac{1}{a})$，$(\frac{1}{a},1)$ 上各有 1 个零点.

综上：当 $0\le a<e$ 时，$f(x)$ 没有零点，

当 $a<0$ 或 $a=e$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点，

当 $a>e$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点.

(2) 令 $h(x)=ax\ln x+1$，则 $h'(x)=a(1+\ln x)$，

当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)>0$；当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)\ge h(\frac{1}{e})=-\frac{a}{e}+1\ge\frac{1}{2}$.

令 $g(x)=\frac{1}{2}xe^{1-x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{2}e^{1-x}(1-x)$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)\le g(1)=\frac{1}{2}$，

$\therefore h(x)>g(x)$，$ax\ln x+1>\frac{1}{2}xe^{1-x}$，$\therefore a\ln x+\frac{1}{x}>\frac{e^{1-x}}{2}$，即 $f(x)>\frac{e^{1-x}}{2}$. 证毕.

10.可使用洛必达法则（极限思想）

知识点 1：$\frac{0}{0}$ 型不定式极限定理

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

（2）在点 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内两者都可导，且 $g'(x)\neq0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞），则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

知识点 2：$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限定理

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+} g(x)=\infty$；

（2）在 x_0 的某右邻域 $\mathring{U}_+(x_0)$ 内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞）. 则 $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

[注]证明过程可参见华东师大编《数学分析》上册（高等教育出版社）

秒杀思路分析

对于较复杂的不等式（含参数）问题，如果参数可分离，可转化为求函数极值问题. 求极值可尝试应用洛必达法则（即验证定理条件）. 如果极限值存在，一般可以使用洛必达法则达到速解的目标.

下面举例说明应用洛必达法则解题的思路与步骤.

eg1: $x\to+\infty$, $\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}$（$\to+\infty$）$\Rightarrow \frac{4x+1}{2x}\Rightarrow\frac{4}{2}=2$

当子，分母分别求导，直到有确定比值.

eg2: $x\to 1$, $\frac{\ln x}{x-1}$（$\to 0$）$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}=1$

eg3: $x\to 0$, $\frac{e^x-1}{\sin x}$（$\to 0$）$\Rightarrow \frac{e^x}{\cos x}=\frac{e^0}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$

eg4: $x\to+\infty$, $\frac{\ln x}{x}$（$\to+\infty$）$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$

洛必达法则：在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限的一种方法，使用条件为$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型

洛必达法则：若函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$（或$\infty$）；

(2)在点a的去心邻域内，$f(x)$与$g(x)$可导且$g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$，

那么 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$

例：（1） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0$ （$\frac{0}{0}$型）

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ （$\frac{+\infty}{+\infty}$型）

例：（1） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0$ （$\frac{0}{0}$型）

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ （$\frac{+\infty}{+\infty}$型）

注意事项：

①将上面公式中的$x\to a$，$x\to\infty$换成$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，洛必达法则也成立.

②洛必达法则可处理$\frac{0}{0}$，$\frac{+\infty}{+\infty}$，$\frac{-\infty}{-\infty}$等，着手求极限以前，首先要检查是否满足$\frac{0}{0}$，$\frac{+\infty}{+\infty}$，$\frac{-\infty}{-\infty}$型定式，否则滥用洛必达法则会出错。当不满足三个前提条件时，就不能用洛必达法则，这时称洛必达法则不适用，应从另外途径求极限.

③若条件符合，洛必达法则可连续多次使用，直到求出极限为止.

以下是一些高考题中的洛必达法则得应用

例1：若不等式$\sin x>x-ax^3$对于$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，求a的取值范围.

【分析】把问题转化为$f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}<a$在$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立，需求$f(x)$的最大值或最大极限值.但直接求很麻烦，故可考虑洛必达法则.

【解析】当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，原不等式等价于$a>\frac{x-\sin x}{x^3}$.

记$f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}$，则$f'(x)=\frac{3\sin x-x\cos x-2x}{x^4}$.

记$g(x)=3\sin x-x\cos x-2x$，则$g'(x)=2\cos x+x\sin x-2$.

因为$g''(x)=x\cos x-\sin x=\cos x(x-\tan x)$，

$g'''(x)=-x\sin x<0$，所以$g''(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，且$g''(x)<0$，

所以$g'(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，且$g'(x)<0$. 因此$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，

且$g(x)<0$，故$f'(x)=\frac{g(x)}{x^4}<0$，因此$f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减.

由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6},$$

即当$x\to 0$时，$g(x)\to\frac{1}{6}$，即有$f(x)<\frac{1}{6}$.

综上：$a\geq\frac{1}{6}$时，不等式$\sin x>x-ax^3$对于$x\in(0,\frac{\pi}{2})$恒成立.

【示例 1】（2010 年课标全国卷文 21）设函数$f(x)=x\left(e^x-1\right)-ax^2$.

（1）若$a=\frac{1}{2}$，求$f(x)$的单调区间；

（2）若当$x\geq 0$时，$f(x)\geq 0$，求a的取值范围.

对于（1）是常规解法，易得$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-1,0)$上单调递减.

对于（2）属不等式恒成立问题，利用洛必达法则解题共分四步.

第一步：（分离变量与构造函数）

$x=0$时，$x\left(e^x-1\right)-ax^2=x\left(e^x-1-ax\right)\geq 0$恒成立，$a\in\mathbf{R}$.

$x>0$时，$a\leq\frac{e^x-1}{x}$，即构造函数$\varphi(x)=\frac{e^x-1}{x}(x>0)$，只需求$\varphi(x)$的最小值.

第二步：（验证洛必达法则条件）

$x\to 0^+$时，$x\to 0$；$e^x-1\to 0$，即$\frac{0}{0}$型，满足条件.

第三步：（求极限，确定答案）

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=e^0=1$，即$a\leq 1$.

第四步：（求导，判定单调性）

∵ $x>0$时，$\varphi(x)$ 应有极小值，∴需验证$\varphi'(x)>0$，即验证$\varphi(x)$为增函数.

$$\varphi'(x)=\frac{e^x\cdot x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2},$$

令$h(x)=(x-1)e^x+1$，$h'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x>0$，

∴ $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即$h(x)>h(0)=0$，∴ $\varphi'(x)>0$. ∴ $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递增函数.

在实际解题时，书写解题过程应将第三步，第四步倒过来叙述.

方法对比

【例 1】（2017 年全国卷Ⅱ文 21）设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq ax+1$，求 a 的取值范围.

常规方法	秒杀方法
（1）$f(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$. 由 $f'(x)=0$ 得 $x=-1-\sqrt{2}$ 或 $x=-1+\sqrt{2}$. 当 $x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减； 当 $x\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增； 当 $x\in(-1+\sqrt{2},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减. 故 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,-1-\sqrt{2})$，$(-1+\sqrt{2},+\infty)$. 增区间为 $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$.	（1）同左. （2）由已知 $ax+1\geq(1-x^2)e^x$， 当 $x=0$ 时，不等式恒成立. 当 $x>0$ 时，$a\geq\dfrac{(1-x^2)e^x-1}{x}$， 令 $\varphi(x)=\dfrac{(1-x^2)e^x-1}{x}(x>0)$， 则 $\varphi'(x)=\dfrac{e^x(-x^3-x^2+x-1)+1}{x^2}$. 设 $h(x)=e^x(-x^3-x^2+x-1)+1$， 则 $h'(x)=e^x(-x^3-4x^2-x)<0$，
（2）$f(x)=(1+x)(1-x)e^x$. 当 $a\geq 1$ 时， 设 $h(x)=(1-x)e^x$. $h'(x)=-xe^x<0(x>0)$. $\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，而 $h(0)=1$，故 $h(x)\leq 1$. $\therefore f(x)=(x+1)h(x)\leq x+1\leq ax+1$. 当 $0<a<1$ 时，设 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1>0(x>0)$. $\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递	$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内递减，$\therefore h(x)<h(0)=0$，即 $\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内递减. 由洛必达法则知 $\varphi(x)_{\max}=\lim\limits_{x\to 0+!}\dfrac{(1-x^2)e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-2xe^x+(1-x^2)e^x}{1}=1$， 故 $a\geq 1$.

增. 而 $g(0)=0$，$\therefore e^x \geq x+1$. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)=(1-x)(1+x)^2$， $(1-x)(1+x)^2-ax-1=x\left(1-a-x-x^2\right)$. 取 $x_0=\frac{\sqrt{5-4a}-1}{2}$，则 $x_0\in(0,1)$， $\left(1-x_0\right)\left(1+x_0\right)^2-ax_0-1=0$，故 $f\left(x_0\right)>ax_0+1$，故不成立. 当 $a\leq 0$ 时，取 $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $x_0\in(0,1)$， $f\left(x_0\right)>\left(1-x_0\right)\left(1+x_0\right)^2=1\geq ax_0+1$，故不成立. 综上，$a$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.	

【例 2】（2016 年全国卷Ⅱ文 20）已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

（1）当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线方程；

（2）若当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)>0$，求 a 的取值范围.

常规方法	秒杀方法
（1）$a=4$，$f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. $f(1)=0$. $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-3$，$f'(1)=-2$. 故切线方程为 $2x+y-2=0$. （2）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f\left(x\right)>0$ 等价于 $\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}>0$，令 $g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$，$g(1)=0$. ①当 $a\leq 2$，$x\in(1,+\infty)$ 时， $x^2+2(1-a)x+1\geq x^2-2x+1>0$. 故 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内递增. $\therefore g(x)>0$.	（1）同左. （2）$\because x>1$，$\therefore$ 由已知得 $a<\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$. 令 $\varphi(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$，则 $\varphi'(x)=\frac{-2\ln x+\frac{x^2-1}{x}}{(x-1)^2}$，令 $h(x)=-2\ln x+\frac{x^2-1}{x}$，则 $h'(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2}>0$. $\therefore h(x)>h(1)=0$. $\therefore \varphi'(x)>0$，即 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内递增. 由洛必达法则知 $\varphi(x)_{\min}=\lim\limits_{x\to 1+}\frac{(x+1)\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln x+\frac{x+1}{x}}{1}=2$.

②当$a>2$时，令$g'(x)=0$得 $x_1=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$，$x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$， 由$x_2>1$和$x_1x_2=1$得$x_1<1$．故当$x\in(1,x_2)$时， $g'(x)<0$，$g(x)$在$(1,x_2)$内递减． $\therefore g(x)<0$． 综上，a的取值范围是$(-\infty,2]$．	故$a\le 2$．

例：已知函数$f(x)=a\ln x+x^2-x$，其中$a\in R$

(Ⅰ)当$a>0$时，讨论$f(x)$的单调性；

(Ⅱ)当$x\ge 1$时，$f(x)\ge 0$恒成立，求实数a的取值范围．

解：由题意得

(Ⅰ)$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-1=\frac{2x^2-x+a}{x}(x>0)$，记$\Delta=1-8a$

当$\Delta\le 0\Rightarrow a\ge\frac{1}{8}$时，$f'(x)\ge 0$恒成立，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递增

当$\Delta>0\Rightarrow 0<a<\frac{1}{8}$时，记$2x^2-x+a=0$的两根为$x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4},x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4}$

当$a>0$时，显然$0<x_1<x_2$

令$f'(x)>0\Rightarrow x>x_2$或$0<x<x_1$；令$f'(x)<0\Rightarrow x_1<x<x_2$

综上：当$a\ge\frac{1}{8}$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$

当$0<a<\frac{1}{8}$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4})$，$(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty)$，

单调递减区间为$(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4},\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4})$

（II）$a\ln x+x^2-x\geq 0$ 在 $x\geq 1$ 时恒成立 $\Rightarrow a\ln x\geq x-x^2$ 恒成立

当 $x=1$ 时，$0\geq 0$ 恒成立，$\therefore a\in R$

当 $x\neq 1$ 时，$\Rightarrow a\geq\left(\dfrac{x-x^2}{\ln x}\right)_{\max}$，记 $g(x)=\dfrac{x-x^2}{\ln x}(x>1)$

$$g'(x)=\frac{(1-2x)\ln x-(x-x^2)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{(1-2x)\ln x-1+x}{(\ln x)^2}$$，记 $h(x)=(1-2x)\ln x-1+x$

$$h'(x)=-2\ln x+(1-2x)\cdot\frac{1}{x}+1=-2\ln x+\frac{1}{x}-1$$，记 $\varphi(x)=-2\ln x+\frac{1}{x}-1$

$$\varphi'(x)=-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}<0$$ 恒成立 $\Rightarrow\varphi(x)$ 递减 $\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(1)=0\Rightarrow h'(x)<0$

$\Rightarrow h(x)$ 递减 $\Rightarrow h(x)<h(1)=0\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow g(x)$ 递减

由洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-2x}{\frac{1}{x}}=-1$，$\therefore a\geq -1$

综上所述：实数 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$

11.必要性探路，充分性证明（端点效应）

先必要后充分思想起源

导数压轴中我们经常遇到恒成立问题，含有参数的不等式恒成立求参数的取值范围问题，是热点和重点题型，方法灵活多样，常见的方法有:①分离参数（全分离或半分离）＋函数最值;②直接（或移项转化）求导＋分类讨论.

但以上两种方法都有缺陷，首先对于方法①可能会出现参数分离困难或是无法分离，抑或函数最值点无法取到，即无定义，这时就需要用到超纲的方法：洛必达法则[1]。其次，对于方法②，直接分类讨论可能会出现在某些区间无法讨论下去，或是无法排除原问题在该区间是否恒成立，即讨论界点不明。

基于以上两点，我们今天这讲就来解决这两个不足之处，基本对策就是先必要后充分的思想。该思想就是当参变分离较为困难、带参讨论界点不明时，含参不等式问题还可以采用先必要、后充分的做法，即先抓住一些关键点（区间端点，可使不等式部分等于零的特殊值等），将关键点代入不等式解出参数的范围，获得结论成立的必要条件，再论证充分性，从而解决问题.

基于此思想衍生出的两种技巧

一、端点效应

假设题干给出含参不等式 $f(x)\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求参数 a 的取值范围.若 $f(x)$ 恰好满足 $f(0)=0$，则称该不等式具有端点效应.具有端点效应的含参不等式恒成立问题的一种常用的解题方法是带参讨论，寻找讨论

[1] 关于如何避免使用洛必达法则，可以参考小π的文章《【导数】如何避免使用洛必达》
链接：https://mp.weixin.qq.com/s/UjwYey4Mq_ecjFhvmU9dHQ

的分界点是解题的关键.既然 $f(x)\geq 0$ 要恒成立，且 $f(0)=0$，那么 $f(x)$ 在 $x=0$ 右侧附近函数值不能减少，所以 $f'(0)\geq 0$，由此可得到 $f(x)\geq 0$ 成立的必要条件 $f'(0)\geq 0$（不一定是充分条件），从而找到讨论的分界点。之后，再讨论所求的必要条件的充分性。

其基本步骤如下：

（1）代入端点值，缩小参数范围：首先利用端点效应初步获得参数的取值范围，这个范围是必要的；

常见的几种缩小参数范围的思路：

1) 若 $f(x,a)\geq 0(a\text{为参数})$ 在 $[a,b](a,b\text{为常数})$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在区间端点处也成立，即 $\begin{cases}f(a)\geq 0\\ f(b)\geq 0\end{cases}$，此法应用于区间端点值包含参数的情况.

2) 若 $f(x,a)\geq 0(a\text{为参数})$ 在 $[a,b](a,b\text{为常数})$ 上恒成立，且 $f(a)=0$（或 $f(b)=0$），则 $f'(a)\geq 0$（$f'(b)\leq 0$）.此法应用于区间端点的函数值为零的情况.

3) 若 $f(x)\geq 0(a\text{为参数})$ 在 $[a,b](a,b\text{为常数})$ 上恒成立，且 $\begin{cases}f(a)=0\\ f'(a)=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(b)=0\\ f'(b)=0\end{cases}$，则 $f''(a)\geq 0$（$f''(b)\geq 0$）.此法应用于区间端点的函数值为零且导数值也为零的情况.

4) 若 $f(x)\geq 0$ 在 (a,b) 上恒成立，则 $\begin{cases}f(a)\geq 0\\ f(b)\geq 0\end{cases}$，此法应用于区间端点值包含参数的情况.

（2）证明充分性，求结果：利用第一步中的参数的范围去判定函数是否单调；

1) 如果函数单调，则由端点得到的范围就是最终答案；

2) 如果函数不单调，则利用端点确定的范围进一步讨论函数的最值.

二、必要性探路

必要探路法，是端点效应的拓展延伸。其不再仅限于代入区间端点，既然不等式在区间上都恒成立，那么将区间上任意一点代入都将成立，都可以得到关于参数的一个不等式，解之便得到一个相较于原来缩小的参数范围，减少不必要的分类讨论。

若使用必要探路法，则尤其要注意第一步，即寻找必要条件，因为其具有较强的技巧性.常见的选取技巧包括选择极值点、不等式公共取等条件、常见特殊数（如 $0,1,e,e^2$ 等）.

【题目 1】已知 $f(x)=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}$（$x>0$）.若当 $x>0$ 时，$f(x)>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，求正整数 k 的最大值.

【解析】（方法一）分离常数

当 $x>0$ 时，$f(x)>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，即 $\dfrac{(x+1)[1+\ln(1+x)]}{x}>k$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.令 $h(x)=\dfrac{(x+1)[1+\ln(1+x)]}{x}$（$x>0$），求导，得 $h'(x)=\dfrac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$.

记 $g(x)=x-1-\ln(1+x)$（$x>0$），求 $g'(x)=\dfrac{x}{1+x}>0$.所以 $g(x)$ 单调递增.

又因为 $g(2)=1-\ln 3<0$，$g(3)=2-\ln 2>0$，所以 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 内有唯一的零点 x_0，且 $\ln(1+x_0)=x_0-1$.

当 $x>x_0$ 时，$g(x)>0$，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 单调递增；当 $0<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 单调递减.所以 $h(x)$ 的最小值为

$$h(x_0)=\frac{(x_0+1)[1+\ln(x_0+1)]}{x_0}=x_0+1\in(3,4).$$

从而 k 的最大值为3.

（方法二）必要性探路

因为 $x>0$ 时，$f(x)>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，故 $f(1)>\dfrac{k}{2}$，所以 $k<2(1+\ln 2)$，所以正整数 k 的最大值不会超过3.

下证当 $k=3$ 时，$f(x)>\dfrac{k}{x+1}$（$x>0$）恒成立.

即证当 $x>0$ 时，$(x+1)\ln(x+1)+1-2x>0$ 恒成立.

令 $\varphi(x)=(x+1)\ln(x+1)+1-2x$，$\varphi'(x)=\ln(x+1)-1$，令 $\varphi'(x)=0$，解得 $x=\mathrm{e}-1$.

当 $x>\mathrm{e}-1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增；

当 $0<x<\mathrm{e}-1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减.

所以 $\varphi(x)$ 的最小值为 $\varphi(\mathrm{e}-1)=3-\mathrm{e}>0$.

所以 $x>0$ 时，$(x+1)\ln(x+1)+1-2x>0$ 恒成立.

因此，正整数 k 的最大值为3.

方法一采用了分离参数法，转化为求函数的最小值，但遇到导函数的零点难以求出，进而转化为研究函数的单调性，利用零点存在性定理估计了导函数的零点所在区间.正是由于 k 取整数这一特点，此方法才奏效；方法二直接利用 k 取整数的特点，猜测出 k 的最大整数值为3.但这只是利用必要性求得最大值，还需证明其充分性.对于恒成立问题，或存在性问题均可利用此种方法缩小讨论的范围.从而降低题目的难度.这一方法，我们称之为必要性探路法，也称为**端点效应**.

『练习 1 』已知函数 $f(x)=\frac{ae^x}{x}+e^x$，$a\in\mathbf{R}$.

（I）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

（II）若 $x>0$ 时，$f(x)>2$，求整数 a 的最小值.

（2019 年湖南省高三大联考）

『解析』（I）略

（II）必要性探路

由 $f(\frac{1}{2})>2\Rightarrow 2a\sqrt{e}+\sqrt{e}>2\Rightarrow a>\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$.由于 $0<\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}<1$，所以 $a\geq 1$.

由于 $a\in\mathbf{Z}$，下证 $a=1$ 时符合题意：

由 $\frac{e^x}{x}+e^x\geq\frac{ex}{x}+e^x>e>2$，所以 $a=1$ 时，不等式成立.

所以 $a=1$ 符合题意.

从而整数 a 的最小值为1.

『练习 2 』若存在 $x\in[e,e^2]$，使 $\frac{x}{\ln x}-kx+k-\frac{1}{2}\leq 0$ 成立，求实数 k 的取值范围.

『解析』设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}-kx+k-\frac{1}{2}$（$x\in[e,e^2]$），依题意，知 $f(x)\leq 0$ 在 $[e,e^2]$ 内有解.由 $f(e^2)\leq 0\Rightarrow\frac{e^2}{2}-ke^2+k-\frac{1}{2}\leq 0\Rightarrow(e^2-1)(\frac{1}{2}-k)\Rightarrow k\geq\frac{1}{2}$.

$f(e)\leq 0\Rightarrow e-ke+k-\frac{1}{2}\leq 0\Rightarrow k\geq\frac{e-\frac{1}{2}}{e-1}$.由 $\frac{e-\frac{1}{2}}{e-1}<\frac{1}{2}$.

所以 $k\geq\frac{1}{2}$.

则存在 $x\in[e,e^2]$，使 $x\left(\frac{2-\ln x}{2\ln x}\right)\leq 0$，即 $f(x)\leq 0$.

另一方面，若 $k<\frac{1}{2}$，则 $\frac{x}{\ln x}-kx+k-\frac{1}{2}>\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}=x\left(\frac{2-\ln x}{2\ln x}\right)\geq 0$，即此时 $f(x)\leq 0$ 不成立.

综上，知实数 k 的取值范围是 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

二、两种题型

上面我们提到，必要性探路也称端点效应，是通过边界值的限制生成一个集合，然后在新的集合中找寻满足题目要求的集合.端点效应的题目一般分为两种类型：

类型一：连续函数 $f(x)$，对 $\forall x\in(a,b)$，$f(x)\geq 0$，且 $f(a)=0$（或 $f(b)=0$），那么一定会有 $f'(a)\geq 0$（或 $f'(b)\leq 0$）.（适用于区间端点值为 0 的情形）.

【题目 2】已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-ax.$

（I）当 $a=0$ 时，求证：$f'(x)\geq 2$；

（II）若 $x\geq 0$ 时，恒有 $f(x)\geq ax$，求实数 a 的取值范围.

【解析】（I）当 $a=0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$，求导，得 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\geq 2\sqrt{\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

（II）$f(x)\geq ax\Leftrightarrow g(x)=f(x)-ax\geq 0$（$x\geq 0$）.

求导，得 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-a$，因为 $g(x)=0$，所以 $g'(0)\geq 0$，解得 $a\leq 2.$

下证 $a\leq 2$ 时，恒有 $g(x)\geq 0$（$x\geq 0$）.

因为 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-a\geq 0$，所以 $g(x)$ 单调递增.

因为 $x\geq 0$，所以 $g(x)\geq g(0)=0.$

【题目 3】已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}.$

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）求证：当 $x\in(0,1)$，求证：$f(x)>2(x+\dfrac{x^{3}}{3})$；

（III）若实数 k，使得 $f(x)>k(x+\dfrac{x^{3}}{3})$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，求实数 k 的最大值.

（2015 年北京卷）

【解析】(I) 由$\frac{1+x}{1-x}>0$，知函数的定义域为$\{x|-1<x<1\}$.而当$x=0$时，$f(0)=0$，由$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，得$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$，$f'(0)=2.$

所以$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为$y=2x$，即$2x-y=0.$

（II）令$g(x)=f(x)-2(x+\frac{x^3}{3})$.求导，得$g'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2-2x^2=\frac{2x^4}{1-x^2}.$

因为$0<x<1$，所以$g'(x)>0$，所以$g(x)$单调递增，所以$g(x)>g(0)=0.$

即$f(x)-2(x+\frac{x^3}{3})>0.$

所以，当$x\in(0,1)$，求证：$f(x)>2(x+\frac{x^3}{3})$.

（III）（方法一）令$h(x)=f(x)-k(x+\frac{x^3}{3})$（$0<x<1$），

求导，得$h'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-k-kx^2.$

对$\forall x\in(0,1)$，$h(x)>0$，且$h(0)=0$，从而此时必有$h'(0)\geq 0$，所以$2-k\geq 0$，所以$k\leq 2.$

下证当$k\leq 2$时，恒有$h(x)>0.$

因为$h'(x)=\frac{kx^4+2-k}{1-x^2}$，且$k\leq 2$，$0<x<1$，所以$h'(x)\geq 0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.又因为$x>0$，所以$h(x)>h(0)=0.$

因此，实数k的最大值为$2.$

其实端点效应是先利用必要性探路，再证明充分性，其实质是数形结合.由于“连续函数$f(x)$，对$\forall x\in(a,b)$，$f(x)\geq 0$，且$f(a)=0$，那么一定会有$f'(a)\geq 0$”并不容易讲得很清楚，所以容易丢掉一定的分数.但此法却为我们分析问题指明了一条道路.下面给出完美的解答：

（方法二）不等式放缩

由（II），知当$k\le 2$时，$f(x)-k(x+\frac{x^3}{3})>f(x)-2(x+\frac{x^3}{3})>0$；

当$k>2$时，令$h(x)=f(x)-k(x+\frac{x^3}{3})$，求导，

得$h'(x)=\frac{2}{1-x^2}-k(1+x^2)=\frac{kx^4-(k-2)}{1-x^2}$，令$h'(x)=0$，解得$x=\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}$，所以$x\in(0,\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}})$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，所以$h(x)<h(0)=0$，即当$k>2$时，$f(x)>k(x+\frac{x^3}{3})$（$0<x<1$）不能恒成立，不合题意.

综上，知实数k的最大值为2.

【题目 4】已知函数$f(x)=(x+a)\ln(x+a)$（$x\ge 0$），a为实数.

（I）当$a=1$时，证明：$f(x)\ge x$；

（II）若不等式$e^x f(x)\ge x^2+x$恒成立，求实数a的取值范围.

（2019 年江西南昌市模拟）

【解析】（I）当$a=1$时，$f(x)=(x+1)\ln(x+1)$，

令$g(x)=f(x)-x=(x+1)\ln(x+1)-x$（$x\ge 0$），$g'(x)=\ln(x+1)>0$，$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)\ge g(0)=0$，从而有$(x+1)\ln(x+1)\ge x$，即$f(x)\ge x$.

（II）因为$x+a>0$在$[0,+\infty)$上恒成立，所以$a>0$.

当$x=0$时，不等式$e^x f(x)\ge x^2+x$成立，即$f(0)\ge 0\Rightarrow a\ln a\ge 0$，解得$a\ge 1$.

下证当$a\ge 1$时，不等式$e^x f(x)\ge x^2+x$在$[0,+\infty)$上恒成立：

当$x\ge 0$时，$x+a>x+1>0$，所以$\ln(x+a)>\ln(x+1)>0$，所以$f(x)=(x+a)\ln(x+a)\ge(x+1)\ln(x+1)$.

由（I）知$(x+1)\ln(x+1)\ge x$在$[0,+\infty)$上恒成立，所以要证$e^x f(x)\ge x^2+x$在$[0,+\infty)$上恒成立，只需证$e^x x\ge x^2+x$，即$e^x\ge x+1$在$[0,+\infty)$上恒成立.

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-x-1$（$x\geq 0$），求导，得 $h'(x)=\mathrm{e}^x-1\geq 0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，从而 $h(x)\geq h(0)$，即 $\mathrm{e}^x\geq x+1$.

所以 $a\geq 1$ 时，不等式 $\mathrm{e}^x f(x)\geq x^2+x$ 在 $[0,+\infty)$ 恒成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

『练习 3』已知 $f(x)=(ax+1)\mathrm{e}^{-x}$（$a\in\mathbf{R}$）.

（I）当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）对任意 $x\in[0,+\infty)$，$f(x)\leq x+1$，求实数 a 的取值范围.

（2019 年广东惠州二模）

『解析』（I）略；

（II）不等式 $f(x)\leq x+1\Leftrightarrow(x+1)-(ax+1)\mathrm{e}^{-x}\geq 0$.

令 $g(x)=(x+1)-(ax+1)\mathrm{e}^{-x}$，求导 $g'(x)=1-a\mathrm{e}^{-x}+(ax+1)\mathrm{e}^{-x}$.

由于 $g(0)=0$，所以 $g'(0)\geq 0$，解得 $a\leq 2$.

下证 $a\leq 2$ 时，恒有 $g(x)\geq 0$，即证 $x+1\geq(ax+1)\mathrm{e}^{-x}\Leftrightarrow(x+1)\mathrm{e}^x\geq ax+1$.

而由于 $x\geq 0$ 时，$\mathrm{e}^x\geq x+1$.所以只需证 $(x+1)^2\geq ax+1$，只需证 $x^2+(2-a)x\geq 0$，而这是显然成立的，从而原不等式得证.

『练习 4』设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）如果对任意的 $x\geq 0$，都有 $f(x)\leq ax$，求实数 a 的取值范围.

『解析』（I）略

（II）令 $g(x)=ax-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$（$x\geq 0$），求导，得 $g'(x)=a-\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$，由 $g(0)=0$，

为使 $g(x)\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，则必有 $g'(0)\geq 0$，即 $a\geq \dfrac{1}{3}$.

因为 $\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2}{2+\cos x}-\dfrac{3}{(2+\cos x)^2}=-3(\dfrac{1}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{3}$，且当 $a\geq\dfrac{1}{3}$

时，$g'(x)=a-\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，所以对任意 $x\geq 0$，

有 $g(x)\geq g(0)=0$，即 $f(x)\leq ax$ 成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,\dfrac{1}{3}]$.

『练习 5』已知函数 $f(x)=a\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $g(x)=\sqrt{x}$ 在交点处具有共同的切线，求 a 的值；

（II）若对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$，都有 $f(x)\geq -x^2+(a+2)x$ 成立，求实数 a 的取值范围.

『解析』（I）设切点为 $(x_0,\ln x_0)=(x_0,\sqrt{x_0})$.

由 $f'(x_0)=\dfrac{a}{x_0}$，$g'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.由于在交点处具有共同的切线，从而有

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\\ a\ln x_0=\sqrt{x_0}\end{cases}\Rightarrow x_0=\mathrm{e}^2\Rightarrow a=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

（II）当 $x=1$，由不等式 $a\ln x\geq -x^2+(a+2)x$，得 $a\leq -1$.

当 $a\leq -1$ 时，考虑到 $\ln x-x<0$.

所以 $a\ln x-[-x^2+(a+2)x]=(\ln x-x)a+x^2-2x\geq x^2-x-\ln x$.

令 $F(x)=x^2-x-\ln x$，求导，得 $F'(x)=2x-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-x-1}{x}=\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x}$，

当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上是增函数.

所以对任意 $x\in[1,\mathrm{e}]$，都有 $F(x)\geq F(1)=0$.

故当 $a\leq -1$ 时，都有 $f(x)\geq -x^2+(a+2)x$ 成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

练习 4 与练习 5 的解答思路是一致的，都是通过边界值的限制生成一个集合，然后在新的集合中找寻满足题目要求的集合.练习 4 与练习 5 中边界值的限制分别来自引入的函数和导函数作为题目的必要条件，同时也是题目充分条件.因此只需证明其充分性即可.

类型二：连续函数 $f(x)$，对 $\forall x\in(a,b)$，$f(x)\geq 0$，且 $\begin{cases}f(a)=0\\f'(a)=0\end{cases}$，则 $f''(x)=0$.

（再若 $f''(a)=0$，则有 $f'''(x)=0$；……，以此类推，无穷无尽……）

【题目 5】已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

（I）证明：$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一的零点；

（II）若 $x\in[0,\pi]$，$f(x)\geq ax$，求 a 的取值范围.

（2019 年全国 I 卷文科试题）

【解析】（I）证明：由题意可知，$f'(x)=\cos x+x\sin x-1$，令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=x\cos x$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$，从而 $h(x)=f'(x)$，即在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增；

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$h'(x)<0$，从而 $h(x)=f'(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减.

又因为 $f'(0)=0$，$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0$，$f'(\pi)=-2<0$，所以 $\exists x_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使得 $f(x_0)=0$.所以 $f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上无零点，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上只有且只有一个零点，即 $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上存在唯一的零点.

（II）由题意，令$x=\pi$，则$f(\pi)\geq a\pi$，从而有$a\leq 0$.

（方法一）令$g(x)=f(x)-ax=2\sin x-x\cos x-(a+1)x$，

则$g'(x)=\cos x+x\sin x-(a+1)$，有$g''(x)=x\cos x$，又$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$g''(x)\geq 0$；

$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$，$g''(x)<0$，且

$g'(0)=-a\geq 0$，$g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-(a+1)>0$，$g'(\pi)=-2-a.$

当$a\leq -2$，有$g'(x)\geq 0$恒成立，即$g(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，从而$g(x)\geq g(0)=0$；

当$-2<a\leq 0$时，有$g'(\pi)<0$，故存在$x_0\in(\frac{\pi}{2},\pi]$，使得$g'(x_0)=0$，且$x\in[0,x_0)$，

$g(x)$单调递增；$x\in[x_0,\pi]$时，$g(x)$单调递减.

又$g(0)=0$，$g(\pi)=-a\pi>0$，从而$g(x)\geq 0$恒成立.

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,0]$.

本题的第（I）小问，判断函数的零点个数问题，只需认真求导即可；第（II）问为恒成立为问题，可利用必要性探路法取点，压缩参数的范围，通过特殊值压缩范围，先猜后证，沿着第（I）问的过程走下去，严谨论证.由$f(\pi)\geq a\pi$，推导出$a\leq 0$后，只需证明$a\leq 0$符合题意即可. 我们从除采用本题的解决方法外，还可以结合放缩加以处理：

（方法二）由(I)知，当$0<x<\frac{\pi}{2}$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)>f(0)=0=ax.$

当$\frac{\pi}{2}<x<x_0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=2-\frac{\pi}{2}>0\geq ax$，

当$x_0<x<\pi$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，$f(x)>f(\pi)=0\geq ax$.

又因为$f(0)=f(\pi)=0\geq ax.$

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,0]$.

【题目 6】已知 $f(x)=2x-\ln(2x+1)$，$g(x)=e^x-x-1$.

（I）求 $g(x)$ 在 $(1,g(1))$ 处的切线方程；

（II）当 $x>0$ 时，$kf(x)\le g(x)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

【解析】（I）切点坐标为 $(1,e-2)$，且 $g'(x)=e^x-1$，所以 $g'(1)=e-1$.

所以切线方程为 $y-(e-2)=(e-1)(x-1)$，即 $(e-1)x-y-1=0$.

（II）记 $F(x)=kf(x)-g(x)=k[2x-\ln(2x+1)]-(e^x-x-1)$（$x>0$），求导，得

$F'(x)=k(2-\frac{2}{2x+1})-(e^x-1)=\frac{4kx}{2x+1}-e^x+1$（$x>0$），

$F''(x)=4k\frac{(2x+1)-2x}{(2x+1)^2}-e^x=\frac{4k}{(2x+1)^2}-e^x$，

由 $F(x)\le 0$，且 $F(0)=0$，$F'(0)=0$，从而 $F''(0)\le 0$，得 $k\le\frac{1}{4}$.

下证当 $k\le\frac{1}{4}$ 时，$F(x)<0$ 恒成立.

（1）当 $k\le\frac{1}{4}$ 时，有 $F''(x)<0$，所以 $F'(x)$ 递减，$F'(x)<F'(0)=0$，所以 $F(x)$ 单调递减，所以 $F(x)<F(0)=0$，符合题意；

（2）当 $k>\frac{1}{4}$ 时，$F''(x)$ 递减，$F''(0)=4k-1>0$，$F''(\frac{2\sqrt{k}-1}{2})=1-e^{\frac{2\sqrt{k}-1}{2}}<0$，

所以存在 $x_0\in(0,\frac{2\sqrt{k}-1}{2})$，使得 $F''(x_0)=0$.

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，有 $F''(x)>0$，所以 $F'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，所以 $F'(x)>F'(0)=0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，从而 $F(x)>F(0)=0$，不合题意.

综上所述，实数 k 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{4}]$.

『练习 6】已知函数 $f(x)=a(x-\sin x)$（$a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0$）.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）设 $g(x)=e^x(\frac{1}{4}x^2+2x-1)-ax+a$.若对 $\forall x\ge 0$，都有 $f(x)+g(x)\ge 0$，求实数 a 的取值范围.

『解析』（I）对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=a(1-\cos x)$.

若 $a>0$ 时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

若 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

（II）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)+g(x)\geq 0$，即 $e^x(\frac{1}{4}x^2+2x-1)+a(1-\sin x)\geq 0$ 成立.

所以当 $x=0$ 时，$-1+a\geq 0$，所以 $a\geq 1$.（由 $x=0$ 探路找到必要条件，再证明充分性即可）.事实上，当 $a\geq 1$ 时，

$$e^x(\frac{1}{4}x^2+2x-1)+a(1-\sin x)\geq e^x(\frac{1}{4}x^2+2x-1)+1-\sin x\geq e^x(\frac{1}{4}x^2+2x-1)+1-x,$$

令 $g(x)=e^x(\frac{1}{4}x^2+2x-1)+1-x$（$x\geq 0$），求导，得

$$g'(x)=e^x(\frac{1}{4}x^2+2x-1)+e^x(\frac{1}{2}x+2)-1=e^x(\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x+1)-1,$$

$$g''(x)=e^x(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+1)+e^x(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2})=e^x(\frac{1}{4}x^2+3x+\frac{7}{2})>0,$$

所以 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)\geq g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)\geq g(0)=0$，从而充分性得证.

综上所述，所求实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

三、深入探索

【题目 7】已知函数 $f(x)=a^2x^3-3ax^2+x+1$，当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$.求实数 a 的取值范围.

【解析】令 $f(1)>0$，得 $a^2-3a+2>0$，解得 $a<1$，或 $a>2$.

事实上，当 $a\le 0$ 时，考虑到 $x\in[1,+\infty)$，容易得到 $f(x)>0$.

即当 $a\le 0$，$f(x)>0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立.

当 $0<a<1$ 时，考虑到 $\frac{1}{a}>1$，及 $f(\frac{1}{a})=a^2(\frac{1}{a})^3-3a(\frac{1}{a})^2+\frac{1}{a}+1=1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}<0$，

即当 $0<a<1$ 时，存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_0)<0$，故 $a\notin(0,1)$.

所以当 $a>2$ 时，对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=3a^2-6a+1=3a(a-2)+1>0$，所以 $a>2$ 时，$f(x)>0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$.

本题的边界值条件不是题目的充分条件，这就需要对边界值的限制加以甄别，找出满足题目条件的集合，由于边界值的限制构成的集合是参数原始集合的子集，或者避开了一些元素，或者提供了有效增设，因而为后期找寻提供了方便.

【题目 8】已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

（I）当 $a=0$ 时，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

（II）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值，求 a 的值.

（2018 年全国 III 卷理科试题）

【解析】（I）略

（II）因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值，所以存在 $x_1<0$，使得对 $\forall x\in(x_1,0)$，有 $f'(x)\ge 0$.

而 $f'(x)=(1+2ax)\ln(1+x)+\frac{2+x+ax^2}{x+1}-2$，发现 $f'(0)=0$，而

$f''(x)=2ax\ln(1+x)+\frac{1+2ax}{1+x}+\frac{ax^2+2x-1}{(x+1)^2}$，发现 $f''(0)=0$，而

$f'''(x)=\frac{2a}{1+x}+\frac{2a-1}{(1+x)^2}+\frac{2(a+1)}{(1+x)^2}$，$f'''(x)\not\equiv 0$，所以 $f'''(x)>0$，解得 $a\ge-\frac{1}{6}$.

同理考虑 $x=0$ 的右侧，得 $a\le-\frac{1}{6}$，从而 $a=-\frac{1}{6}$.下只需证 $a=-\frac{1}{6}$ 时，$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点即可.（以下略）

【题目 9】已知实数 $a\neq 0$，设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{x+1}$，$x>0$.

（I）当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）对任意 $x\in[\frac{1}{e^2},+\infty)$，均有 $f(x)\leq\frac{x}{2a}$，求 a 的取值范围.

（2019 年浙江卷）

【解析】（I）当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，$f'(x)=\frac{(4x+3)(x-3)}{4x\sqrt{x+1}(2x+3\sqrt{x+1})}$.

当 $0<x<3$ 时，有 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>3$ 时，有 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 单调减区间为 $(0,3)$，单调增区间为 $(3,+\infty)$.

（II）（方法一）由题意，有 $f(1)=\sqrt{2}\leq\frac{1}{2a}$，解得 $0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$，下证 $0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$ 符合题意，即证 $\frac{\sqrt{x}}{2a^2}-\frac{\sqrt{x+1}}{a}-\ln x\geq 0$，令 $g(a)=\frac{\sqrt{x}}{2a^2}-\frac{\sqrt{x+1}}{a}-\ln x$.

当 $x\geq 1$ 时，由不等式 $\ln x\leq\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$，

$g(a)\geq g(\frac{\sqrt{2}}{4})=4\sqrt{x}-2\sqrt{2(x+1)}-\ln x\geq 4\sqrt{x}-2\sqrt{2(x+1)}-(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\geq 0$；

当 $\frac{1}{7}\leq x\leq 1$ 时，由不等式 $\ln x\leq\frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$，

$g(a)\geq g(\frac{\sqrt{2}}{4})=4\sqrt{x}-2\sqrt{2(x+1)}-\ln x\geq 4\sqrt{x}-2\sqrt{2(x+1)}-\frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}\geq 0$；

当 $\frac{1}{e^2}\leq x<\frac{1}{7}$ 时，$g(a)\geq-\ln x-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\geq\ln 7-\frac{4\sqrt{7}}{7}>\frac{\ln\frac{7^5}{3^8}}{7}>0$.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{\sqrt{2}}{4}]$.

本题的第（II）小问为恒成立问题，通过必要性探路取特殊值压缩范围即可，后续即为函数不等式证明问，其中涉及换元思路、主元转换、放缩等手段，常规题目，手段多元，平凡中蕴含着美丽.本题这种讨论相对来说较为复杂，也比较难以理解.但究其根，属于不等式放缩的问题.

（方法二）由题意，有 $f(1)=\sqrt{2}\le\frac{1}{2a}$，解得 $0<a\le\frac{\sqrt{2}}{4}$，下证 $0<a\le\frac{\sqrt{2}}{4}$ 符合题意：

若 $a\in(0,\frac{\sqrt{2}}{4}]$，当 $x\ge1$ 时，$\ln x\ge0$，$\frac{\sqrt{x}}{2a}\ge\sqrt{2x}$，$a\ln x\le\frac{\sqrt{2}}{4}\ln x$，只需证 $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln x+\sqrt{x+1}\le2x$ 在 $x\ge1$ 恒成立即可.

设 $x=t^2$，则 $t\in[1,+\infty)$，下证 $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln t^2+\sqrt{t^2+1}\le\sqrt{2}t$.

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\ln t^2+\sqrt{t^2+1}\le\sqrt{2}\ln\sqrt{t}+\sqrt{t^2+1}\le\sqrt{2}(\sqrt{t}-1)+\sqrt{t^2+1}\le\sqrt{2t}+\sqrt{t^2+1}-\sqrt{2}$$

$$\le2\sqrt{\frac{\sqrt{2t}^2+\sqrt{t^2+1}^2}{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{2}(t+1)-\sqrt{2}=\sqrt{2}t.$$

当 $x\in[\frac{1}{e^2},1)$ 时，$a\ln x+\sqrt{x+1}\le\sqrt{x+1}\le\sqrt{2x}\le\frac{\sqrt{x}}{2a}$.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{\sqrt{2}}{4}]$.

上述证法均蕴含取点的手段，无论是零点问题还是恒成立问题，而恒成立问题中的取点是有经验成份的，需要在平时做题中积累，可以理解为非理性直觉的作用.高考试题的难度均低于模拟试题的难度.在研究导数问题时，需要养成“数形结合，严谨论证”的好习惯.数学是一门讲究严谨性的学科，解题过程需要大胆猜想与小心论证相结合.

12.泰勒公式

一、泰勒展开公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x，在 x_0 与 x 之间至少存在一点 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)，R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

余项，上式称为 n 阶泰勒公式.

若 $x_0=0$，则泰勒公式称为麦克劳林公式，其中 $o(x^n)$ 为 n 阶无穷小，相当于余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1},$$

即 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$.

二、常用的初等函数的麦克劳林公式

$(1)e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$(2)\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$

$(3)\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

$(4)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$

$(5)\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

$(6)\ (1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

例 1 按 $(x-1)$ 的三展开多项式 $f(x)=x^4+3x^2+4$.

思路: 直接展开法, 求 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的森展开的 n 阶泰勒公式, 则依次求 $f(x)$ 直到 $n+1$ 阶的导数在 $x=x_0$ 处的值, 然后代入公式即可.

【解析】

$f'(x)=4x^3+6x, f'(1)=10; f''(x)=12x^2+6, f''(1)=18; f'''(x)=24x, f'''(1)=24; f^{(4)}(x)=24. f^{(1)}(1)=24, f^{(5)}(x)=0 f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4=8+10(x-1)+9(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4$

例 2 求函数 $y=xe^x$ 的带有皮亚诺型余项的 n 阶麦克劳林展开式.

【解析】解法一: $y'=(x+1)e^x, y'(0)=1; y''=(x+2)e^x, y''(0)=2; \cdots; y^{(n)}=(x+n)e^x$, $y^{(n)}(0)=n$, 将以上结果代入麦克劳林公式得

$xe^x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$

法二: $f(x)$ 中含有 e^x 时, 通常利用已知结论.

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ .\ xe^x=x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+o(x^{n-1})\right)=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$

例 4 当 $x>0$ 时, $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

【解析】解法一: 令 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$, 则当 $x>0$ 时, $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)>0, f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}, x\in[0,+\infty)$

单调递增, 从而 $f(x)>f(0)=0$, 即 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$, 结论成立.

法二: 由泰勒公式得

$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}(0<\xi<x)$,

从而得 $f(x)=\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}>0, 1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$, 结论成立.

例 5 设 $x>0$, 证明:$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.

【解析】证明法一: 设 $h(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(x+1)$,

$h'(x)=1-x-\frac{1}{x+1}=\frac{-x^2}{x+1}<0(x>0)$, 则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

$\therefore h(x)<h(0)=0$, 即有 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(x+1)$.

法二: 由泰勒展开可得 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}(\xi\in(0,x)$

$\because x>0,\therefore \frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>0$

则 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>x-\frac{x^2}{2}$, 结论成立.

例 6 证明:$\ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}(-1<x<1)$

【解析】证明:设 $f(x)=\ln(1+x)\,(-1<x<1)$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有带有拉格朗日余项。

三阶泰勒公式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}(-1<\xi<1)$

$\because -\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}\leqslant 0,\therefore \ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

例 7 证明不等式:$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}(x>0)$.

【解析】证明:设 $f(x)=\sqrt{1+x}$, 则 $f(0)=1$,

$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},f'(0)=\frac{1}{2}f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},f''(0)=-\frac{1}{4},f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

代入 $x_0=0$ 的二阶泰勒公式, 有 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16(1+\xi)^{\frac{5}{3}}}(0<\xi<1)$

$\because x>0,\therefore \frac{x^3}{16(1+\xi)^{\frac{5}{3}}}>0,\therefore 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}(x>0)$

例 8 比较 $\ln(x+1),x$ 和 $x-\frac{x^2}{2}$ 的大小.

【解析】令 $f(x)=\ln(x+1),x_0=0$,

按泰勒展开有 $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}$.

去掉余项可以得到不等式:$x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x,(x\geqslant 0)$.

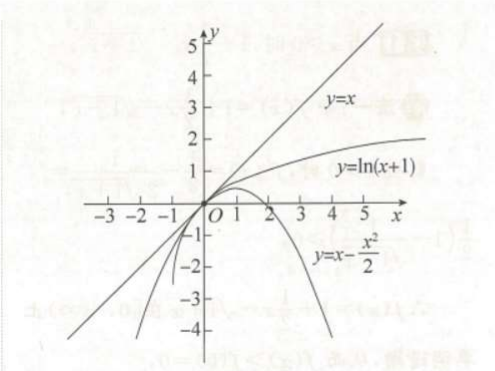
下面利用一般方法证明该不等式.

证明:(1) 设 $h(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(x+1),h'(x)=1-x-\frac{1}{x+1}=\frac{-x^2}{x+1}\leqslant 0,(x\geqslant 0)$, 则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减. $\therefore h(x)\leqslant h(0)=0,x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)$, 当 $x=0$ 时取等号.

(2) 设 $f(x)=\ln(x+1)-x,f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}\leqslant 0,(x\geqslant 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,$\therefore f(x)\leqslant f(0)=0$, 即有 $\ln(x+1)\leqslant x$, 当 $x=0$ 时取等号.

综上所述, 有不等式:$x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x(x\geqslant 0)$, 当 $x=0$ 时取等号.

上述常用对数不等式描述的函数位置关系如下图所示.



同理，我们可以从指数函数的麦克劳林展开人手，通过去余项变形的方式得到我们常用的不等式：对于函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x=0$ 处的展开式如下：$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

(1) 从此式出发，可以变形演绎出一些十分重要的不等式.

(1) 式等号右边取两项，则有 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$.(2)

(2) 式两边取自然对数得 $x\geqslant\ln(x+1)\,(x>-1)$.(3)

(2) 式中用 $-x$ 替换 x 得 $\mathrm{e}^{-x}\geqslant 1-x\Leftrightarrow\mathrm{e}^x\leqslant\frac{1}{1-x}(x<1)$

(4) 式两边取自然对数得 $x\leqslant-\ln(1-x)\,(x<1)$

(5) 式中用 $\frac{x}{1+x}$ 替换 x 得 $\frac{x}{1+x}\leqslant-\ln\left(1-\frac{x}{1+x}\right)=\ln(1+x)\,(x>-1)$.

结合 (3) 式和 (6) 式得 $\frac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x(x>-1)$.(7)

对 (1) 式等号右边分别取三项、四项，则有 $\mathrm{e}^x\geqslant\frac{x^2}{2}+x+1(x\geqslant0)\mathrm{e}^x\geqslant\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1(x\geqslant0)$.

上述不等式 (2) 到 (9) 式，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

读者可以翻到前面关于“放缩法”的章节，试试看利用泰勒展开得到其他常用的不等式.

利用泰勒放缩证明含参不等式

在不等式恒成立中，我们通过泰勒展开放缩来大大简化计算，但前面也说过，泰勒展开放缩是一种近似计算，所求的范围只能是必要性范围，一般来说，会比直接求解的范围要大，所以需要进一步用常规方法验证，但这里也可以简化了讨论的范围，方便计算，一般也可以得到最终的范围.

例 9 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$，证明：当 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant0$.

【解析】解法一：去参放缩法当 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}-\ln x-1$. 构造函数 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}-\ln x-1$，则 $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}-\frac{1}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$. 当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$. $\therefore x=1$ 是 $g(x)$ 的最小值点.

故当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=0$. 因此，当 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

法二：泰勒展开法

由法一知，证明 $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}-\ln x-1\geqslant 0$ 即可. 由泰勒公式的变形可得 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$.

用 $x-1$ 代替 x 可得 $\mathrm{e}^{x-1}\geqslant x.(1)$

对 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ 两边取自然对数，可得 $x\geqslant\ln(x+1)$，

用 $x-1$ 代替 x，可得 $x-1\geqslant\ln x$，即 $x\geqslant\ln x+1$

由 (1) (2) 可得 $\ln x+1\leqslant x\leqslant\mathrm{e}^{x-1}$，故 $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}-\ln x-1\geqslant 0$

因此，当 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

例 10 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-cx^2$，若当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

【解析】$f'(x)=\mathrm{e}^x-1-2ax$，由指数不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

得 $f'(x)\geqslant x-2ax=(1-2a)x$，从从而当 $1-2a\geqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$，

而 $f(0)=0$，于是当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

由 $\mathrm{e}^x>1+x(x\neq 0)$ 可得 $\mathrm{e}^{-x}>1-x(x\neq 0)$

从而当 $a>\frac{1}{2}$ 时，

$f'(x)<\mathrm{e}^x-1+2a(\mathrm{e}^{-x}-1)=\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-2a)$，

故当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时，$f'(x)<0$，

而 $f(0)=0$，当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时，$f(x)<0$，不合题意.

综合得 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

例 11 设函数 $f(x)=\ln(1+x),g(x)=xf'(x),x\geqslant 0$. 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x)\geqslant ag(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】第一步：泰勒展开放缩得必要性范围.

$\ln(x+1)\geqslant\frac{ax}{x+1},x\geqslant 0$ 恒成立，应用不等式 $\ln(x+1)\leqslant x$，有 $x\geqslant\ln(x+1)\geqslant\frac{ax}{x+1},x\geqslant 0$，

对上式进行放缩，利用 $x\geqslant\frac{ax}{x+1},x\geqslant 0$ 求 a 的取值范围.

(1) 当 $x=0$ 时，上式化简为 $0\geqslant a\times 0$，此时 $a\in\mathbf{R}$.

(2) 当 $x>0$ 时，上式化简为 $1\geqslant\frac{a}{x+1}$，即 $a\leqslant x+1$，则有 $a\leqslant 1$.

第二步：常规讨论验证略. 综上所述，有 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

例 12 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$，若 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\leqslant 0$，求 λ 的最小值.

【解析】第一步：泰勒展开放缩得必要性范围.

要 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}\leqslant 0$ 在 $x\geqslant 0$ 时恒成立，

利用不等式 $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)$，有 $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)\leqslant\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$，该不等式在 $x=0$ 时取等号，

对上式进行放缩，利用 $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\frac{x(1+\lambda x)}{1+x},x\geqslant 0$ 求 λ 的最小值.

当 $x=0$ 时，上式化简为 $0\leqslant 0$，此时 $\lambda\in\mathbf{R}$. 当 $x>0$ 时，上式化简为 $\frac{1-x}{2}\leqslant\lambda$，则有 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$.

第二步：常规讨论验证略.

综上所述，当 $x\geqslant 0$ 时，若 $f(x)\leqslant 0$，则 $\lambda\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，其最小值为 $\frac{1}{2}$.